

PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DE SISTEMAS DINÁMICOS

JUAN RIVERA-LETELIER

RESUMEN. En los años 1970 se descubrieron algunos sistemas dinámicos deterministas, como el flujo de Lorenz y la aplicación de Hénon, que paradójicamente se comportan de forma aleatoria. Desde entonces se ha demostrado que muchos otros sistemas dinámicos tienen el mismo comportamiento paradójico, como las transformaciones logísticas y más generalmente los sistemas que admiten una torre de Young. Según una conjetura de Palis, la mayoría de los sistemas dinámicos diferenciables tienen este comportamiento.

El objetivo de estas notas es introducir algunos de los conceptos más importantes del punto de vista probabilístico de los sistemas dinámicos, y desarrollar los resultados básicos de la teoría ergódica.

ÍNDICE

1. Introducción	2
2. El punto de vista probabilístico	6
3. Recurrencia y ergodicidad	19
4. Teoremas ergódicos	32
5. Aplicaciones mezclantes	43
Apéndice A. Álgebras de conjuntos y medidas	50
Referencias	53

1. INTRODUCCIÓN

En términos generales, un *sistema dinámico de tiempo discreto* es una transformación T actuando en un espacio X ,

$$T : X \rightarrow X.$$

Usualmente X representa el espacio de estados de un sistema, y T representa la ley de transformación de los estados en una unidad de tiempo. Para cada entero $n \geq 1$ denotamos por

$$T^n := \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_n$$

el n -ésimo iterado de T . También usamos T^0 para denotar la identidad en X . La transformación $T^n : X \rightarrow X$ representa la evolución en tiempo n de los estados.

Dado un punto x_0 en X , la *órbita de x_0 para T* es la sucesión de puntos en X ,

$$x_0, T(x_0), T^2(x_0), \dots$$

El punto x_0 se la *condición inicial* de la órbita.

Uno de los objetivos centrales en la teoría de los sistemas dinámicos es *describir el comportamiento en el largo plazo de la mayoría de las órbitas de un sistema dinámico típico*.

En algunos casos la transformación T es simple, pero su dinámica es difícil de entender. Uno de los ejemplos emblemáticos es la familia cuadrática: Dado un número complejo c , consideremos el polinomio cuadrático $P_c(z) := z^2 + c$, visto como una transformación actuando en el plano complejo \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} P_c : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto P_c(z) := z^2 + c. \end{aligned}$$

Para cada valor del parámetro c tenemos un sistema dinámico de tiempo discreto distinto. Para aspectos generales sobre la dinámica de polinomios complejos se puede consultar [CG93, Mil06].

Fijemos un parámetro c en \mathbb{C} . La parte interesante de la dinámica de P_c ocurre en el conjunto

$$K_c := \{z_0 \in \mathbb{C} : (P_c^n(z_0))_{n \geq 1} \text{ es acotado}\},$$

que es llamado el *conjunto de Julia lleno de P_c* . Es un conjunto compacto, y su frontera $J_c := \partial K_c$ es llamada el *conjunto de Julia de P_c* .

La complejidad de la dinámica de P_c se refleja en su conjunto de Julia J_c . Por ejemplo, la Figura 1.1 representa el conjunto de Julia J_c con $c = i$. Es una dendrita, y por lo tanto su dimensión topológica es

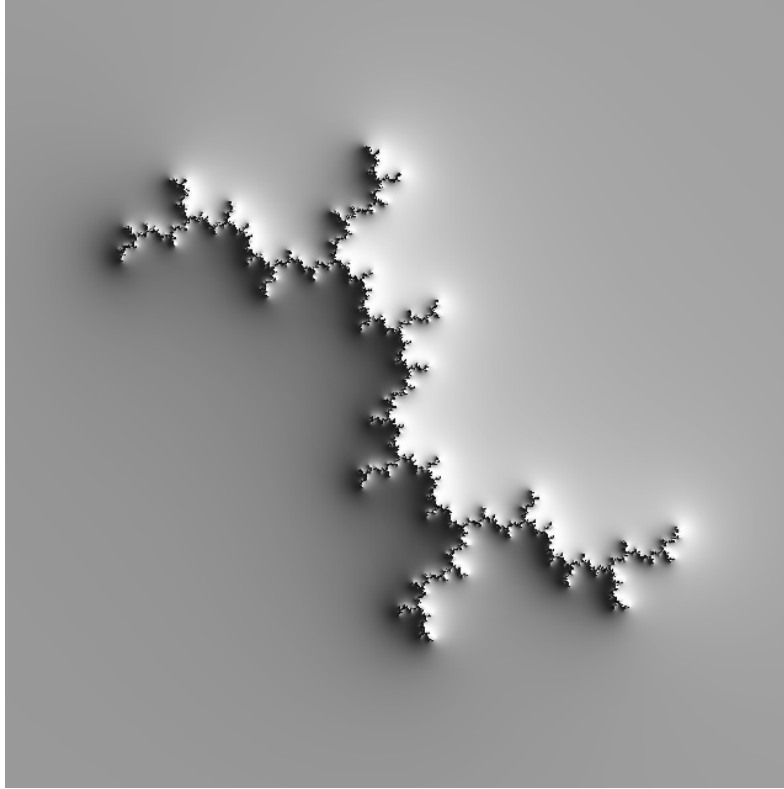


FIGURA 1.1. Conjunto de Julia J_c con $c = i$, de la galería de Tomoki Kawahira.

igual a 1. Sin embargo, su dimensión de Hausdorff estrictamente más grande que 1. Por lo tanto, es un “fractal” en el sentido de Mandelbrot.

Otro ejemplo interesante es el conjunto de Julia lleno con parámetro

$$c_0 := \frac{\lambda_0}{2} - \frac{\lambda_0^2}{4}, \text{ donde } \lambda_0 := \exp\left(2\pi i \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right),$$

representado en la Figura 1.2. Una particularidad de P_{c_0} es que tiene un punto fijo donde la derivada de P_{c_0} es igual a λ_0 : El punto $z_0 := \frac{\lambda_0}{2}$ satisface

$$P_{c_0}(z_0) = z_0 \text{ y } P'_{c_0}(z_0) = \lambda_0.$$

Esto implica que el conjunto de Julia lleno K_{c_0} de P_{c_0} contiene un disco de Siegel en torno a z_0 .

La Figura 1.3 representa el conjunto de Julia lleno con parámetro

$$c_1 := \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1^2}{4}, \text{ donde } \lambda_1 := \exp\left(2\pi i \cdot \frac{55}{89}\right),$$

que esta próximo c_0 . Los conjuntos de Julia llenos K_{c_0} y K_{c_1} son muy parecidos, pero el conjunto de Julia J_{c_1} ocupa mas espacio que J_{c_0} ; prácticamente llena todo el interior de K_{c_0} . Algo similar ocurre con otras perturbaciones bien escogidas del parámetro c_0 . Este fenómeno fue uno de los ingredientes usados por Buff y Chéritat para demostrar la existencia de un parámetro cuyo conjunto de Julia tiene medida positiva, ver [BC06]. Así resolvieron un problema propuesto en los trabajos de Fatou, hace casi 100 años.

Finalmente, la Figura 1.4 representa el *conjunto de Mandelbrot*: El conjunto de todos los parámetros c en \mathbb{C} tal que el conjunto de Julia correspondiente es conexo.

Sobre estas notas. Estas notas fueron desarrolladas como parte de cursos de doctorado de teoría ergódica que dicté en la Pontificia Universidad Católica de Chile el 2012, y en la Universidad Católica del Norte el 2004, 2006, y 2007.

Quisiera agradecer principalmente a Sebastian Herrero, quien hizo varias correcciones y simplificaciones a una versión preliminar de estas notas.

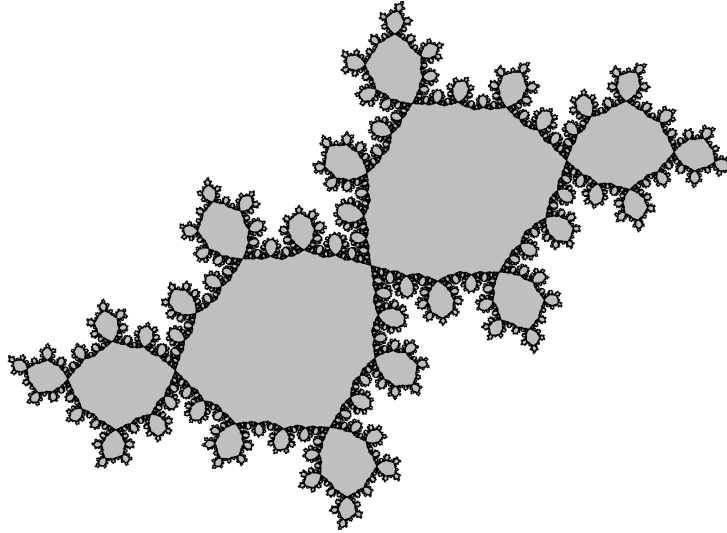


FIGURA 1.2. Conjunto de Julia lleno con un disco de Siegel, de la galería de Arnaud Chéritat.

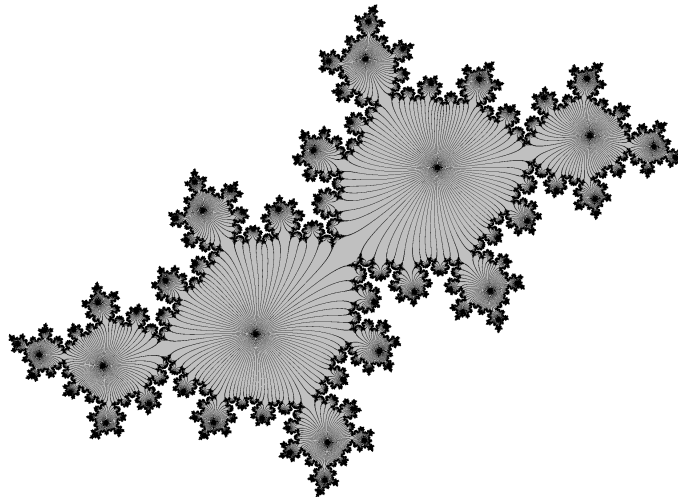


FIGURA 1.3. Conjunto de Julia lleno parabólico, de la galería de Arnaud Chéritat.

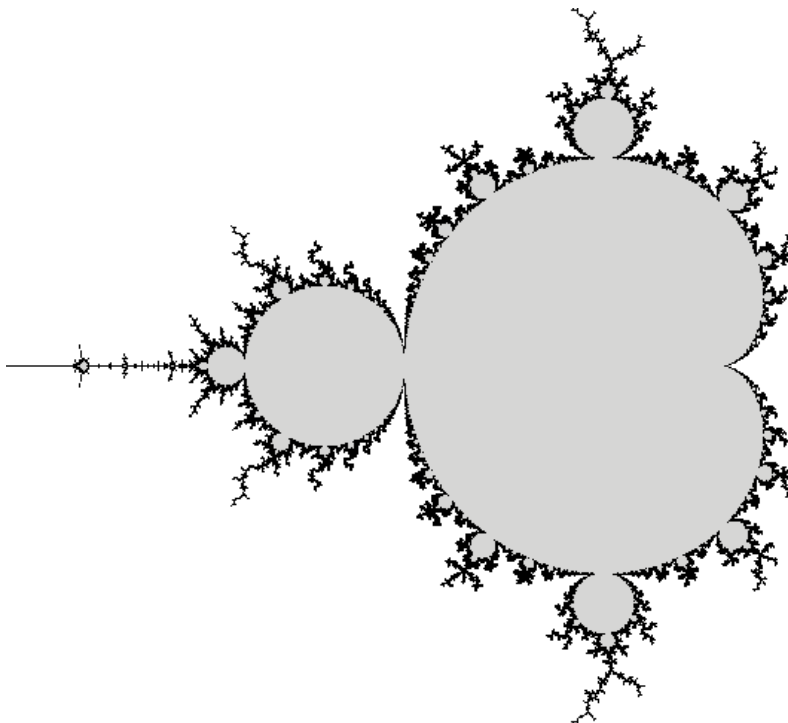


FIGURA 1.4. Conjunto de Mandelbrot, de la galería de Curtis McMullen.

2. EL PUNTO DE VISTA PROBABILÍSTICO

Paradójicamente, la mejor descripción que tenemos de algunos sistemas dinámicos de tiempo discreto es en términos probabilísticos. Comenzaremos con la siguiente definición.

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico y ν una medida boreliana de probabilidad en X . Decimos que una sucesión de puntos $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ en X está *equidistribuida con respecto a ν* , o que ν describe la *distribución asintótica de $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$* , si para toda función continua $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x_0) + \cdots + \varphi(x_{n-1})}{n} = \int_X \varphi \, d\nu.$$

Al considerar una transformación T actuando en un espacio topológico X , nos interesamos en aquellas medidas ν que describen la distribución asintótica de una o varias órbitas. Si la órbita de un punto x_0 en X está equidistribuida con respecto a una medida ν , entonces para

cada función continua $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos

$$(2.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x_0) + \cdots + \varphi(T^{n-1}(x_0))}{n} = \int_X \varphi \, d\nu.$$

El lado izquierdo de la ecuación es el *promedio temporal* de φ a lo largo de la órbita de x_0 , y el lado derecho el *promedio espacial* de φ con respecto a ν . Por lo tanto, la equidistribución asegura que *los promedios temporales coinciden con los promedios espaciales*.

Para entender mejor el significado de (2.1), consideremos un subconjunto medible A de X , cuya frontera ∂A tiene medida nula con respecto a ν , es decir $\nu(\partial A) = 0$. Entonces un argumento directo de aproximación muestra que en (2.1) podemos reemplazar φ por la función indicatriz $\mathbb{1}_A$ de A . Para cada entero $n \geq 1$, el número

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{1}_A(x_0) + \mathbb{1}_A(T(x_0)) + \cdots + \mathbb{1}_A(T^{n-1}(x_0))}{n} \\ &= \frac{1}{n} \# \{j \in \{0, \dots, n-1\} : T^j(x_0) \in A\} \end{aligned}$$

es la proporción de tiempos j en $\{0, \dots, n-1\}$ para los cuales $T^j(x_0)$ está en A . Por lo tanto (2.1) asegura que *el promedio de visitas de la órbita de x_0 a A es igual a $\nu(A)$ en el límite*.

La Figura 2.1 representa una parte de una órbita de un automorfismo de una superficie $K3$. El automorfismo preserva una forma de área, pero no se sabe si existen órbitas equidistribuidas con respecto a esta medida.

2.1. Equidistribución en el círculo. En esta sección consideramos el círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} provisto con la estructura de grupo aditivo que hereda de \mathbb{R} , y de la medida de probabilidad Lebesgue inducida por la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Dado α en \mathbb{R}/\mathbb{Z} , la *rotación de ángulo α* , o *traslación en α* , está definida por

$$\begin{aligned} T_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x &\rightarrow T_\alpha(x) := x + \alpha. \end{aligned}$$

Teorema de Equidistribución de Weyl. *Sea α en \mathbb{R}/\mathbb{Z} irracional y sea $T_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la rotación de ángulo α . Entonces para todo x_0 en \mathbb{R}/\mathbb{Z} , la órbita $(T_\alpha^j(x_0))_{n=0}^{+\infty}$ de x_0 para T_α está equidistribuida con respecto a Lebesgue.*

La Figura 2.2 representa una parte de una órbita para la rotación de ángulo igual al número de oro, $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Las rotaciones irracionales son inusuales en que *toda* órbita está equidistribuida con respecto a una misma medida. Para la transformación

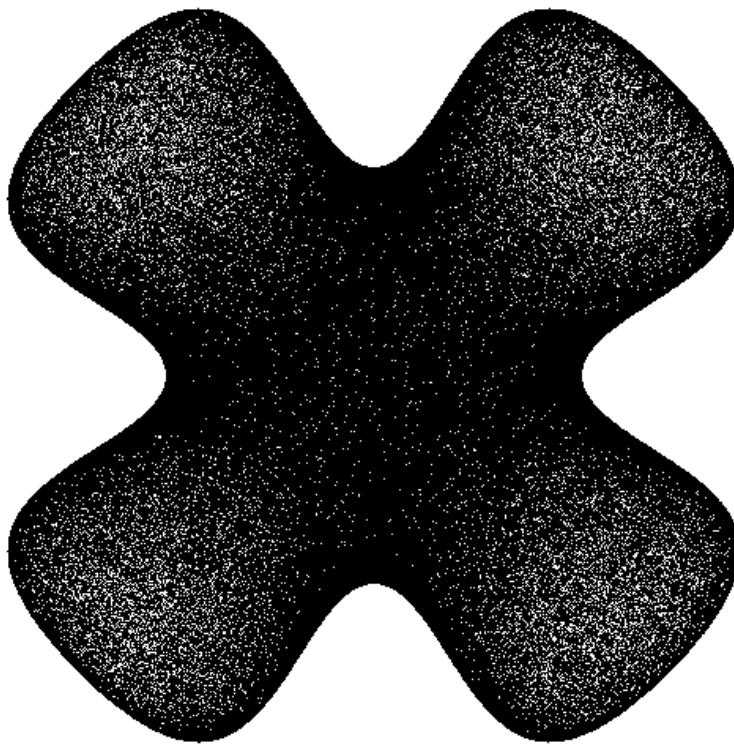


FIGURA 2.1. Órbita de un automorfismo de una superficie $K3$, de la galería de MCMULLEN.

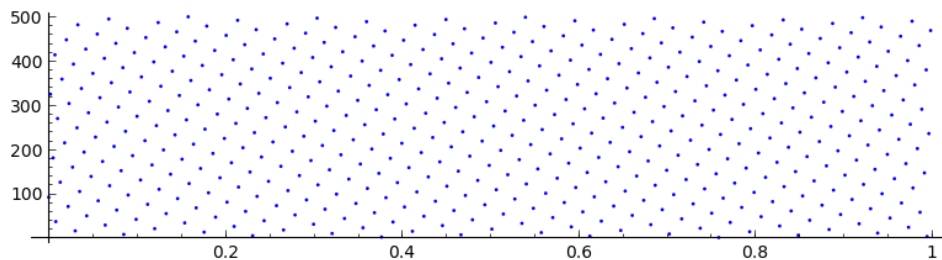


FIGURA 2.2. Órbita hasta tiempo 500 para la rotación de ángulo $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. La coordenada vertical es el tiempo, y la horizontal el círculo, representado por el intervalo $[0, 1]$.

de *duplicación de ángulo*

$$\begin{aligned} m_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x &\mapsto m_2(x) := 2x, \end{aligned}$$

la equidistribución ocurre para un conjunto de medida de Lebesgue total de condiciones iniciales, pero se puede demostrar que no ocurre para todas.

Teorema 2.2. *Para toda condición inicial x_0 en un subconjunto de \mathbb{R}/\mathbb{Z} de medida total para Leb, la órbita $(m_2^j(x_0))_{n=0}^{+\infty}$ de x_0 para m_2 está equidistribuida con respecto a Leb.*

Este resultado se puede deducir fácilmente del Teorema Ergódico Puntual usando series de Fourier, ver §3.8.1.

2.2. Familia logística. En esta sección consideramos la *familia logística* $(f_\lambda)_{\lambda \in (0,4]}$, definida para un parámetro λ en $(0, 4]$ por

$$\begin{aligned} f_\lambda : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto f_\lambda(x) := \lambda x(1 - x). \end{aligned}$$

La familia logística ha atraído mucho interés desde que en 1976 el biólogo Robert May la propuso como un modelo de dinámica de poblaciones.

La Figura 2.3 representa el gráfico de f_λ para $\lambda = 3,74$, y la Figura 2.4 una parte de una órbita para esta transformación. Después de un tiempo, la órbita es atraída por una órbita periódica atractora de período 5. Se puede demostrar que existe un conjunto de medida de Lebesgue total de condiciones iniciales cuyas órbitas están equidistribuidas con respecto a una medida finita soportada en la órbita periódica atractora. El parámetro $\lambda = 3,74$ es un ejemplo de un parámetro *regular*, ver §2.4.

Cuando $\lambda = 4$, la transformación logística f_4 se conoce como la *transformación de Ulam y von Neumann*, quienes la propusieron en 1947 como un generador de números pseudo-aleatorios. La Figura 2.5 representa una parte de una órbita para esta transformación. Es menos regular que la parte de órbita para la rotación de ángulo $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ de la Figura 2.2. Sin embargo, en §2.3 demostramos que si hay una cierta regularidad: Existe un conjunto de medida de Lebesgue total de condiciones iniciales cuyas órbitas están equidistribuidas con respecto a la medida $\frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$. El parámetro $\lambda = 4$ es un ejemplo de un parámetro *estocástico*, ver §2.4.

La Figura 2.6 representa el diagrama de bifurcación de la familia logística. La coordenada vertical es el parámetro λ , desde $\lambda = 0$ (abajo) hasta $\lambda = 4$ (arriba). En la recta horizontal de altura λ esta representado el límite de la órbita de $x_0 = 1/2$. Por ejemplo, para λ cercano a 0 este límite se reduce a un único punto, y para λ cercano a 4 el límite pareciera ser un intervalo.

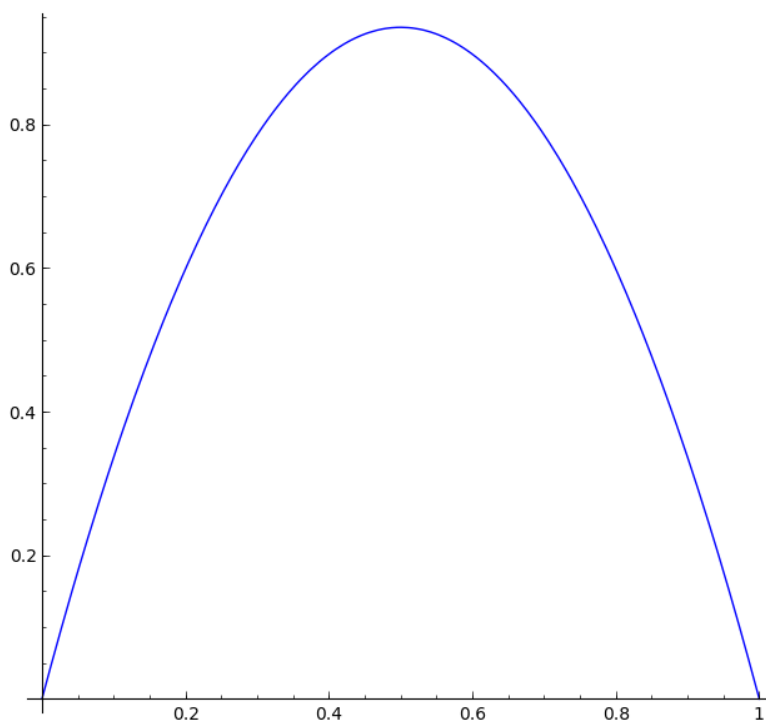


FIGURA 2.3. Gráfico de la transformación logística f_λ , para $\lambda = 3,74$.

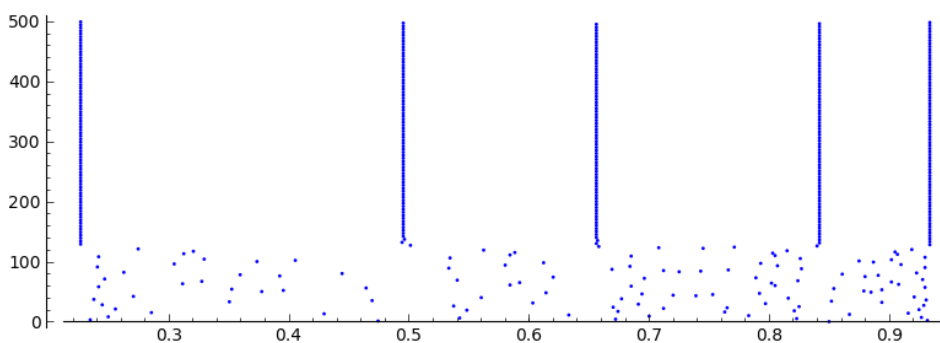


FIGURA 2.4. Órbita hasta tiempo 500 para la transformación logística f_λ , con $\lambda = 3,74$. La coordenada vertical es el tiempo, y la horizontal el intervalo $[0, 1]$.

2.3. Histogramas. En esta sección analizamos las propiedades estadísticas de la aplicación de Ulam y von Neumann, $f_4(x) = 4x(1-x)$.

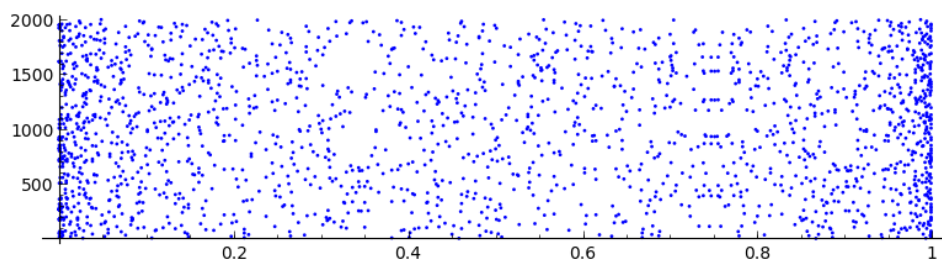


FIGURA 2.5. Órbita hasta tiempo 2000 para la transformación de Ulam y von Neumann. La coordenada vertical es el tiempo, y la horizontal el intervalo $[0, 1]$.

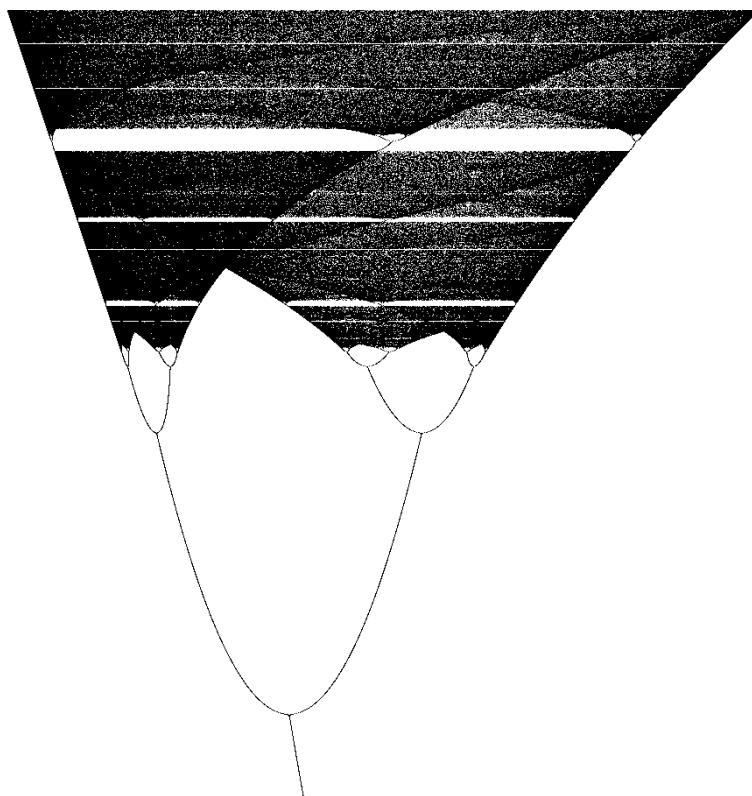


FIGURA 2.6. Diagrama de bifurcación de la familia logística.

Comenzamos con una representación gráfica de la distribución de una órbita, conocida usualmente como “histograma”.

Consideremos una condición inicial x_0 , su órbita hasta un tiempo T , y dividamos el intervalo $[0, 1]$ en un número N de intervalos de la misma

longitud. Con estos datos definimos para cada i en $\{0, \dots, N-1\}$ el número

$$v_i := \left\{ j \in \{0, \dots, T-1\} : f_4^j(x_0) \in \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right) \right\},$$

y consideremos el gráfico de barras que sobre cada intervalo $\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right)$ tiene altura $v_i \frac{N}{T}$. Agregamos el factor $\frac{N}{T}$ para que el área debajo del gráfico sea igual a 1.

La Figura 2.7 es el histograma con $x_0 = 1/\pi$, $T = 2000$, y $N = 100$. Observemos que este pedazo de órbita pasa más tiempo en los extremos de $[0, 1]$, lo que también se puede apreciar en la Figura 2.5.

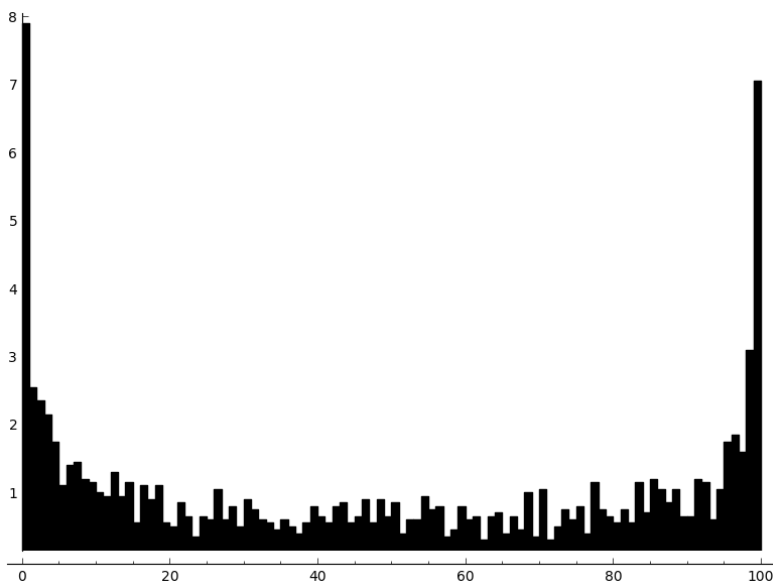


FIGURA 2.7. Histograma de una órbita hasta tiempo 2000 para la transformación de Ulam y von Neumann.

A continuación usaremos el Teorema Ergódico Puntual para demostrar que los histogramas de las órbitas de f_4 convergen a la función $x \mapsto \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$, provisto que la condición inicial pertenezca un conjunto de medida de Lebesgue total, y cuando hacemos primero $T \rightarrow +\infty$ y después $N \rightarrow +\infty$. La Figura 2.8 es el gráfico del histograma con $x_0 = 1/e$, $T = 20000$, y $N = 200$, junto con el gráfico de la función $x \mapsto \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$.

Usaremos una consecuencia inmediata del Teorema Ergódico Puntual, demostrado en §4.1. Para enunciar este resultado necesitamos introducir algunos conceptos.

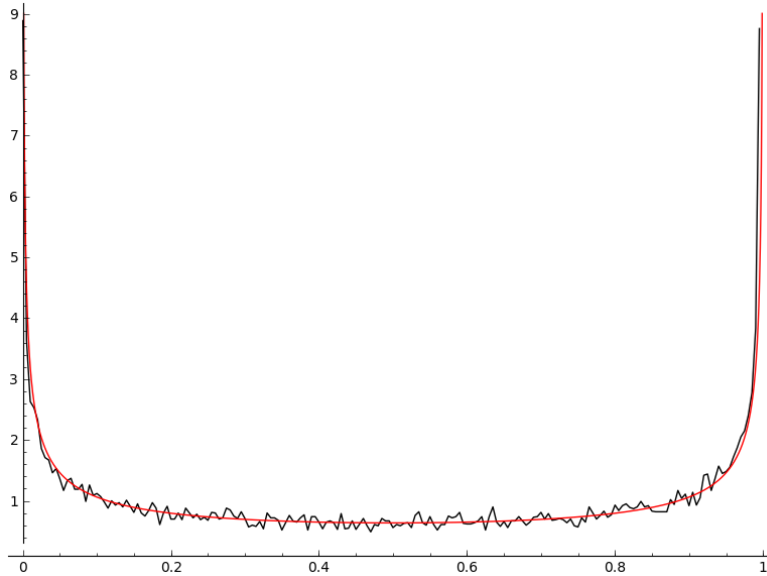


FIGURA 2.8. Gráfico de la función $x \mapsto \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$, junto con el gráfico de un histograma de una órbita para la transformación de Ulam y von Neumann.

Recordemos que para un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) , un conjunto medible Y tiene *medida nula* si $\mu(Y) = 0$, y tiene *medida total* si $X \setminus Y$ tiene medida nula. Dada una transformación $T : X \rightarrow X$, un subconjunto Y de X es *invariante*, si $T^{-1}(Y) = Y$.

Definición 2.3. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y $T : X \rightarrow X$ una transformación medible. Decimos que T es *ergódica con respecto a μ* , o que μ es *ergódica para T* , si cada subconjunto medible de X que es invariante por T tiene medida nula o total.

Dado un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) , una transformación medible $T : X \rightarrow X$ *preserva medida* si para todo conjunto medible A de X tenemos

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A),$$

ver §3. El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema Ergódico Puntual demostrado en § 4.1.

Teorema 2.4. *Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de probabilidad y T una transformación medible que preserva medida. Entonces para toda función medible $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $\int |\varphi| d\mu < +\infty$ existe un subconjunto*

de medida total de X donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ T^j = \int \varphi d\mu.$$

Para aplicar este resultado a la transformación de Ulam y von Neumann f_4 , consideremos el intervalo $[0, 1]$ provisto de su σ -álgebra de Borel \mathcal{B} , y la medida de probabilidad ν en $([0, 1], \mathcal{B})$ definida por

$$(2.2) \quad \nu := \frac{dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}}.$$

Un calculo directo muestra que para todo intervalo I contenido en $[0, 1]$ tenemos

$$\nu(f_4^{-1}(I)) = \nu(I).$$

Esto implica que la transformación de Ulam y von Neumann f_4 preserva ν , ver parte 1 del Teorema A.2. Por lo tanto, el siguiente resultado nos permite aplicar el Teorema 2.4 a f_4 y la medida (2.2).

Lema 2.5. *La transformación de Ulam y von Neumann es ergódica con respecto a la medida (2.2), y por lo tanto con respecto a la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.*

Estamos en posición de demostrar que los histogramas de órbitas de f_4 convergen a la función $x \mapsto \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$. Sea $N \geq 1$ un entero, y para cada i en $\{0, \dots, N-1\}$ sea $X_{N,i}$ el subconjunto de $[0, 1]$ de medida total para ν dado por el Teorema 2.4 con $\varphi = \mathbf{1}_{[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]}$. Se sigue que

$$X_N := \bigcap_{i=0}^{N-1} X_{N,i}$$

es un subconjunto de $[0, 1]$ de medida total para ν , y por lo tanto para la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

Fijemos x_0 en $\bigcap_{N=1}^{\infty} X_N$ y un entero $N \geq 1$. Dado un entero $T \geq 1$, para cada i en $\{0, \dots, N-1\}$ definimos

$$v_{i,T} := \left\{ j \in \{0, \dots, T-1\} : f_4^j(x_0) \in \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right) \right\}.$$

Entonces el Teorema 2.4 implica que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{v_{i,T}}{T} = \int \mathbf{1}_{[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N})} d\nu = \int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}} \frac{dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}}.$$

Esto demuestra que, fijando x_0 y N y haciendo $T \rightarrow +\infty$, el histograma de la órbita de x_0 hasta tiempo T converge al gráfico de la función

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left(N \int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}} \frac{dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \right) \mathbb{1}_{\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right)}.$$

Para concluir, observemos que cuando $N \rightarrow +\infty$ esta función converge a $x \mapsto \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$.

2.4. Medidas físicas y medidas absolutamente continuas e invariantes. En los resultados de equidistribución que hemos visto hasta el momento, hay una única medida que describe la distribución asintótica de casi todas las órbitas. Esto motiva el concepto de “medida física”, que pasamos a introducir.

Consideremos un espacio topológico X y una transformación continua $T : X \rightarrow X$. En muchos casos de interés, el espacio X está provisto de una medida de referencia natural. Por ejemplo, el intervalo $[0, 1]$ está provisto de la restricción de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , y el círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} está provisto de la medida Leb inducida por la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Más generalmente, para una variedad diferenciable podemos considerar una forma de volumen como una medida de referencia.

Definición 2.6. Sea X un espacio topológico y $T : X \rightarrow X$ una transformación continua. La *cuenca* de una medida boreliana de probabilidad ν en X es el conjunto de todas las condiciones iniciales en X cuya órbita para T está equidistribuida con respecto a ν . Además, si μ es una medida boreliana de referencia en X , entonces ν es *física con respecto a μ* si la cuenca de ν tiene medida positiva con respecto a μ .

Con esta terminología, el Teorema de Equidistribución de Weyl enunciado en §2.1 se puede formular de la siguiente forma: Para una rotación irracional en \mathbb{R}/\mathbb{Z} , la cuenca de Leb es igual a todo \mathbb{R}/\mathbb{Z} . En particular, la medida Leb es una medida física con respecto a ella misma. Similarmente, el Teorema 2.2 se puede formular como sigue: Para la transformación de duplicación de ángulo en \mathbb{R}/\mathbb{Z} , la medida Leb es una medida física con respecto a ella misma.

Combinando el Teorema 2.4 con el Lema 2.5 se sigue que para la transformación de Ulam y von Neumann $f_4(x) = 4x(1-x)$, la medida $\frac{dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$ es física con respecto a la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

Consideremos un parámetro λ en $(0, 4]$ tal que la transformación logística f_λ posee una órbita periódica atractora, como el parámetro $\lambda = 3,74$ considerado en la Figura 2.4. Más precisamente, supongamos que existe un punto x_0 en $[0, 1]$ y un entero $n \geq 1$, tales que

$$f_\lambda^n(x_0) = x_0 \text{ y } |Df_\lambda^n(x_0)| < 1.$$

Entonces se puede demostrar que la cuenca de la medida

$$\frac{1}{n} \left(\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{f_\lambda^{n-1}(x_0)} \right)$$

tiene medida de Lebesgue total en $[0, 1]$. En particular, esta medida es física con respecto a la medida de Lebesgue. Diremos que un parámetro λ con esta propiedad es *regular*.

El siguiente resultado nos da un criterio para encontrar medidas físicas. Es una consecuencia inmediata del Teorema 2.4.

Proposición 2.7. *Sea X un espacio topológico compacto provisto de una medida de referencia μ , y sea $T : X \rightarrow X$ continua y ergódica con respecto a μ . Si ν es una medida boreliana de probabilidad en X que es invariante por T y que es absolutamente continua con respecto a μ , entonces la cuenca de ν tiene medida total con respecto a ν , y por lo tanto ν es una medida física con respecto a μ .*

La Figura 2.9 representa la densidad de una medida absolutamente continua con respecto a una forma de área en la esfera de Riemann. Esta medida es invariante y ergódica con respecto a una cierta función racional compleja, y por lo tanto es una medida física por la Proposición 2.7.

El siguiente resultado nos permitirá aplicar el criterio de la Proposición 2.7 a todas las transformaciones logísticas. Es una generalización amplia del Lema 2.5.

Teorema 2.8 (Blokh-Lyubich, [BL91]). *Toda aplicación logística es ergódica con respecto a la medida de Lebesgue.*

Combinado con el hecho que la cuenca de una medida es un conjunto invariante, este resultado implica de forma inmediata:

Corolario 2.9. *Para una transformación logística, la cuenca de una medida física tiene medida total con respecto a la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. En particular, una transformación logística tiene a lo más una medida física.*

Por la Proposición 2.7 también tenemos como consecuencia inmediata:

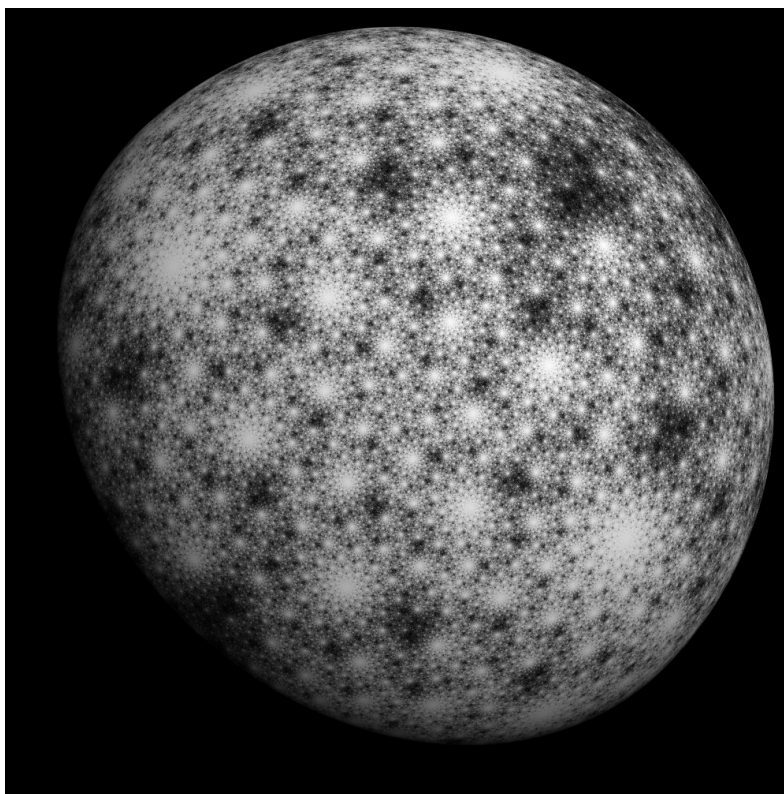


FIGURA 2.9. Densidad de una medida absolutamente continua con respecto a una forma de área en la esfera de Riemann, que es invariante con respecto a una función racional compleja; de la galería de Arnaud Chéritat.

Corolario 2.10. *Para una transformación logística, toda medida de probabilidad invariante que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue es una medida física.*

Un parámetro λ en $(0, 4]$ es *estocástico*, si f_λ admite una medida de probabilidad invariante que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Por los Corolarios 2.9 y 2.10, una tal medida es física con respecto a la medida de Lebesgue, y su cuenca tiene medida total en $[0, 1]$. Las consideraciones en §2.3 se aplican sin cambios a cualquier parámetro estocástico, e implican que los histogramas de casi toda órbita convergen a la densidad de la medida física.

El parámetro $\lambda = 4$ es estocástico, ya que la medida (2.2) es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, y es invariante por f_4 , ver § 2.3.

Observemos que para un parámetro regular la medida física correspondiente no es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, ya que esta soportada en un conjunto finito.

Terminamos con el siguiente resultado de Lyubich, que demuestra que casi todas las transformaciones logísticas tienen una medida física, ver también [Lyu00].

Teorema 2.11 (Lyubich, [Lyu02]). *Con respecto a la medida de Lebesgue en $(0, 4]$, casi todo parámetro es regular o estocástico.*

3. RECURRENCIA Y ERGODICIDAD

3.1. Sistemas dinámicos medibles y factores. Sean (X, \mathcal{F}) y $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$ espacios medibles y $T : X \rightarrow \tilde{X}$ una transformación medible. Para cada medida μ en (X, \mathcal{F}) , la *medida imagen* $T_*\mu$ de μ es la medida en $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$ definida para cada \tilde{A} en $\tilde{\mathcal{F}}$, por

$$T_*\mu(\tilde{A}) = \mu(T^{-1}(\tilde{A})).$$

Dado un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) , diremos que una transformación medible $T : X \rightarrow X$ *preserva medida* si $T_*\mu = \mu$. En este caso diremos que (X, \mathcal{F}, μ, T) es una *transformación que preserva medida*. En el caso particular en que (X, \mathcal{F}, μ) es un espacio de probabilidad, diremos que (X, \mathcal{F}, μ, T) es un *sistema dinámico medible*.

Sean (X, \mathcal{F}, μ, T) y $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ transformaciones que preservan medida. Una *aplicación factor* de (X, \mathcal{F}, μ, T) a $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ es una función medible $h : X \rightarrow \tilde{X}$ tal que $h_*\mu = \tilde{\mu}$ y tal que $h \circ T = \tilde{T} \circ h$ en un conjunto de medida total para μ . Cuando tal h existe, diremos que $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ es un *factor* de (X, \mathcal{F}, μ, T) , o que (X, \mathcal{F}, μ, T) es una *extensión* de $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$. Es inmediato verificar que una composición de aplicaciones factor es una aplicación factor. Si $h : X \rightarrow \tilde{X}$ es una aplicación factor de (X, \mathcal{F}, μ, T) a $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ y existe una aplicación medible $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que $\tilde{h} \circ h$ y $h \circ \tilde{h}$ coinciden con la identidad de X y de \tilde{X} en un conjunto de medida total para μ y $\tilde{\mu}$, respectivamente, entonces diremos que h es un *isomorfismo*. Cuando tal h existe, diremos que (X, \mathcal{F}, μ, T) y $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ son *isomorfas*.

Lema 3.1. Sean (X, \mathcal{F}, μ, T) y $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ transformaciones que preservan medida y sea $h : X \rightarrow \tilde{X}$ una aplicación factor. Entonces tenemos las siguientes propiedades:

1. Existe un subconjunto de medida total X_0 de X tal que $T(X_0) \subset X_0$ y tal que $h \circ T = \tilde{T} \circ h$ en X_0 . En particular, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{T} & X_0 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{T}} & \tilde{X} \end{array}$$

2. Si h es un isomorfismo, entonces existen subconjuntos de medida total X_0 y \tilde{X}_0 de X y \tilde{X} , respectivamente, tal que

$$T(X_0) \subset X_0, \tilde{T}(\tilde{X}_0) \subset \tilde{X}_0,$$

y tal que $h : X_0 \rightarrow \tilde{X}_0$ es una biyección cuya inversa es medible que envía $\tilde{\mu}|_{\tilde{X}_0}$ en $\mu|_{X_0}$. En particular, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{T} & X_0 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \tilde{X}_0 & \xrightarrow{\tilde{T}} & \tilde{X}_0 \end{array}$$

Nota 3.2. Es inmediato verificar que para cualquier X_0 y cualquier función medible $h : X_0 \rightarrow \tilde{X}$ como en la parte 1 del lema, toda extensión medible de h a X es una aplicación factor. Similarmente, para cualquier X_0 y \tilde{X}_0 y cualquier función medible $h : X_0 \rightarrow \tilde{X}_0$ como en la parte 2 del lema, toda extensión medible de h a X es un isomorfismo.

Demostración del Lema 3.1. Para demostrar la parte 1, sea X' un subconjunto de medida total de X donde $h \circ T = \tilde{T} \circ h$. Entonces

$$(3.1) \quad X_0 := \bigcap_{j=0}^{+\infty} T^{-j}(X')$$

es un subconjunto de medida total de X' que satisface $T(X_0) \subset X_0$. Por lo tanto tenemos $h \circ T = \tilde{T} \circ h$ en X_0 . También se sigue que X_0 es de medida total X . Esto demuestra la parte 1.

Para demostrar la parte 2, sea $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow X$ una función medible tal que $\tilde{h} \circ h$ y $h \circ \tilde{h}$ coinciden con Id_X y $\text{Id}_{\tilde{X}}$ en un conjunto de medida total para μ y $\tilde{\mu}$, respectivamente. Sean X' y \tilde{X}' subconjuntos de medida total de X y \tilde{X} donde $h \circ T = \tilde{T} \circ h$ y $\tilde{h} \circ h = \text{Id}_X$, y donde $\tilde{h} \circ \tilde{T} = T \circ \tilde{h}$ y $h \circ \tilde{h} = \text{Id}_{\tilde{X}}$, respectivamente. Finalmente, sea X_0 definido por (3.1) con X' reemplazado por $X' \cap h^{-1}(\tilde{X}')$. Entonces X_0 es de medida total en X y tenemos

$$T(X_0) \subset X_0, (h \circ T)|_{X_0} = (\tilde{T} \circ h)|_{X_0}, (\tilde{h} \circ h)|_{X_0} = \text{Id}_{X_0}, \text{ y } h(X_0) \subset \tilde{X}'.$$

Se sigue que el conjunto $\tilde{X}_0 := \tilde{h}^{-1}(X_0) \cap \tilde{X}'$, que esta en $\tilde{\mathcal{F}}$, tiene medida total en \tilde{X} , y es igual a $h(X_0)$. Concluimos que la inversa de $h|_{X_0}$ es igual a $\tilde{h}|_{\tilde{X}_0}$, y que por lo tanto es medible. Finalmente, observemos que

$$\tilde{T}(\tilde{X}_0) = \tilde{T}(h(X_0)) = h(T(X_0)) \subset h(X_0) = \tilde{X}_0,$$

y que para todo A en \mathcal{F} contenido en X_0 , tenemos

$$\begin{aligned} ((h|_{X_0})^{-1})_* (\tilde{\mu}|_{\tilde{X}_0})(A) &= \tilde{\mu}(h(A)) = h_*\mu(h(A)) = \mu(h^{-1}(h(A))) \\ &= \mu|_{X_0}(X_0 \cap h^{-1}(h(A))) = \mu|_{X_0}(A). \end{aligned}$$

Esto completa la demostración de la parte 2 y del lema. \square

3.2. La categoría de los sistemas dinámicos medibles. En esta sección usamos el lenguaje de las categorías para demostrar que las aplicaciones que preservan medida y los sistemas dinámicos medibles forman clases naturales de sistemas dinámicos. Esta sección no es esencial para el resto de estas notas y se puede saltar. Las nociones básicas de categorías se pueden encontrar, por ejemplo, en [ML98].

Primero demostraremos que existe una categoría cuyos objetos son las transformaciones que preservan medida y cuyos morfismos son las clases de equivalencia de aplicaciones factor, para una cierta clase de equivalencia introducida abajo. Como consecuencia inmediata obtendremos que los sistemas dinámicos medibles y los morfismos entre ellos forman una (sub)categoría. Finalmente demostraremos que una aplicación factor es un isomorfismo en el sentido de §3.1 si y solo si su clase de equivalencia es un isomorfismo en el sentido de las categorías (Lema 3.3).

Sean (X, \mathcal{F}, μ, T) y $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ transformaciones que preservan medida. Entonces 2 aplicaciones factor

$$h : X \rightarrow \tilde{X} \text{ y } \hat{h} : X \rightarrow \tilde{X}$$

son *equivalentes*, si coinciden en un subconjunto de medida total para μ . Es fácil ver que esta relación es una relación de equivalencia. Para una aplicación factor h , denotamos por $[h]$ la clase de equivalencia de h .

Los morfismos de la categoría que estamos definiendo son las clases de equivalencia de aplicaciones factor. Para definir la composición de morfismos, consideremos transformaciones que preservan medida

$$(X, \mathcal{F}, \mu, T), (Y, \mathcal{G}, \nu, S), \text{ y } (Z, \mathcal{H}, \xi, R).$$

Dadas aplicaciones factor equivalentes

$$h : X \rightarrow Y \text{ y } \hat{h} : X \rightarrow Y,$$

y

$$g : Y \rightarrow Z \text{ y } \hat{g} : Y \rightarrow Z,$$

respectivamente, es inmediato verificar que $g \circ h$ y $\hat{g} \circ \hat{h}$ son equivalentes. Por lo tanto podemos definir la composición $[g] \circ [h]$ de las clases de equivalencia de h y g , por

$$[g] \circ [h] := [g \circ h].$$

Una verificación inmediata muestra que la composición de clases de equivalencia de aplicaciones factor es asociativa.

Solo nos falta verificar la existencia de un morfismo identidad para cada transformación que preserva medida (X, \mathcal{F}, μ, T) . Observemos que para cada transformación que preserva medida $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ y cada aplicación factor $h : X \rightarrow \tilde{X}$, tenemos

$$[h] \circ [\text{Id}_X] = [h \circ \text{Id}_X] = [h].$$

Por otro lado, para toda aplicación factor $g : \tilde{X} \rightarrow X$ tenemos

$$[\text{Id}_X] \circ [g] = [\text{Id}_X \circ g] = [g].$$

Esto demuestra que $[\text{Id}_X]$ es un morfismo identidad de (X, \mathcal{F}, μ, T) .

Esto completa la demostración de la existencia de una categoría cuyos objetos son las transformaciones que preservan medida y cuyos morfismos son las clases de equivalencia de aplicaciones factor. Como la imagen de un sistema dinámico medible por un morfismo es también un sistema dinámico medible, se sigue que los sistemas dinámicos medibles junto con los morfismos entre ellos forman una (sub)categoría.

Lema 3.3. *Sean (X, \mathcal{F}, μ, T) y $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ transformaciones que preservan medida y $h : X \rightarrow \tilde{X}$ una aplicación factor. Entonces h es un isomorfismo si y solo si su clase de equivalencia $[h]$ es un isomorfismo en el sentido de las categorías.*

Demostración. Supongamos que $[h]$ es un isomorfismo en el sentido de las categorías, de tal forma que existe una aplicación factor $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que $[\tilde{h}] \circ [h] = [\text{Id}_X]$ y $[h] \circ [\tilde{h}] = [\text{Id}_{\tilde{X}}]$. En particular \tilde{h} es medible y $\tilde{h} \circ h$ y $h \circ \tilde{h}$ coinciden con Id_X y $\text{Id}_{\tilde{X}}$ en un conjunto de medida total para μ y $\tilde{\mu}$, respectivamente. Esto demuestra que la aplicación factor h es un isomorfismo.

Supongamos ahora que h es un isomorfismo, sean X_0 y \tilde{X}_0 dados por la parte 2 del Lema 3.1, y sea $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow X$ cualquier extensión medible de $(h|_{X_0})^{-1}$. Entonces por el Lema 3.1 se sigue que \tilde{h} es una aplicación factor de $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ a (X, \mathcal{F}, μ, T) . Por otro lado, por la definición de aplicación factor isomorfismo se sigue que $[\tilde{h}] \circ [h] = [\text{Id}_X]$ y $[h] \circ [\tilde{h}] = [\text{Id}_{\tilde{X}}]$. Esto demuestra que $[h]$ es un isomorfismo en el sentido de las categorías. \square

3.3. Recurrencia de Poincaré.

Proposición 3.4 (Teorema de recurrencia de Poincaré). *Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible. Entonces para cada subconjunto A de X*

de medida positiva, el conjunto de los puntos de A que retornan infinitas veces a A bajo iteración tiene medida total en A .

Demostración. Dado un entero $n \geq 0$, sea A_n el subconjunto de A de los puntos que retornan exactamente n veces a A bajo iteración. Es suficiente demostrar que para cada entero $n \geq 0$ el conjunto A_n tiene medida nula. Para demostrar esto, observemos que ningún punto de A_n puede retornar a A_n bajo iteración. Por lo tanto, los conjuntos

$$A_n, T^{-1}(A_n), \dots$$

son disjuntos dos a dos. Como cada uno de estos conjuntos tiene la misma medida que A_n , concluimos que A_n es de medida nula. Esto completa la demostración de la proposición. \square

3.4. Conjuntos (cuasi-)invariantes. Sea X un conjunto y sean A y B subconjuntos de X . La *diferencia simétrica* de A y B es

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Definición 3.5 (Conjuntos (cuasi-)invariantes). Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $T : X \rightarrow X$ una transformación medible. Un subconjunto medible A de X es *invariante* si $T^{-1}(A) = A$, y es *cuasi-invariante* si $T^{-1}(A) \Delta A$ tiene medida nula.

Lema 3.6. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $T : X \rightarrow X$ una transformación medible tal que para cada subconjunto E de medida nula de X , el conjunto $T^{-1}(E)$ también es de medida nula. Entonces para cualquier subconjunto medible A de X que es cuasi-invariante por T , el conjunto

$$A' := \bigcap_{i=0}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} T^{-j}(A)$$

es invariante por T y $A \Delta A'$ es de medida nula.

Antes de pasar a la demostración de este lema, observemos que para subconjuntos A , B y C de X tenemos

$$(3.2) \quad A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$$

y

$$(3.3) \quad A \Delta (B \cup C) \subset (A \Delta B) \cup (A \Delta C).$$

Además, para cualquier transformación $T : X \rightarrow X$ tenemos

$$(3.4) \quad T^{-1}(A) \Delta T^{-1}(B) = T^{-1}(A \Delta B).$$

Demostración Lema 3.6. Para cada entero $i \geq 0$, sea

$$A_i := \bigcup_{j=i}^{+\infty} T^{-j}(A).$$

Luego

$$A' = \bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i \text{ y } T^{-1}(A') = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

Como A_i es decreciente con i , concluimos que $T^{-1}(A') = A'$.

Para demostrar que $A \triangle A'$ tiene medida nula, observemos que para cada entero $j \geq 1$ tenemos por (3.2) y (3.4)

$$A \triangle T^{-j}(A) \subset \bigcup_{\ell=0}^{j-1} (T^{-\ell}(A) \triangle T^{-(\ell+1)}(A)) = \bigcup_{\ell=0}^{j-1} T^{-\ell} (A \triangle T^{-1}(A)).$$

Por lo tanto, el conjunto $A \triangle T^{-j}(A)$ es de medida nula. Junto con (3.3), esto implica que para cada entero $i \geq 0$ el conjunto $A \triangle A_i$ tiene medida nula. A su vez, esto implica que $A \triangle A'$ es de medida nula. \square

3.5. Ergodicidad. Recordemos que para un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) , una transformación medible $T : X \rightarrow X$ es *ergódica* si cada subconjunto invariante de X tiene medida nula o total (Definición 2.3).

Es inmediato verificar que para una transformación que preserve medida y es ergódica, todo factor es ergódico.

Proposición 3.7. *Para un sistema dinámico medible (X, \mathcal{F}, μ, T) , las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. T es ergódica;
2. Cada subconjunto cuasi-invariante de X tiene medida nula o total;
3. Para todo subconjunto A de X de medida positiva, el conjunto $\bigcup_{i=0}^{+\infty} T^{-i}(A)$ es de medida total;
4. Para todo par de subconjuntos A y B de X de medida positiva existe un entero $n \geq 0$ tal que $T^{-n}(A) \cap B$ es de medida positiva.

Demostración. Para demostrar $1 \Rightarrow 2$, sea A un conjunto cuasi-invariante y sea A' el conjunto invariante definido en el Lema 3.6. Entonces A' tiene medida nula o total. Como $A \triangle A'$ tiene medida nula, esto implica que A' tiene medida nula o total.

Para demostrar $2 \Rightarrow 3$, sea A un conjunto de medida positiva. Como

$$(3.5) \quad A_0 := \bigcup_{i=0}^{+\infty} T^{-i}(A)$$

contiene a A , es suficiente demostrar que A_0 es cuasi-invariante. Observemos que $T^{-1}(A_0) \subset A_0$. Como $T^{-1}(A_0)$ y A_0 tienen la misma medida y μ es de probabilidad, se sigue que A_0 es cuasi-invariante. Esto completa la demostración de $2 \Rightarrow 3$.

Para demostrar $3 \Rightarrow 4$, observemos que por la parte 3 el conjunto (3.5) tiene medida total. Como B tiene medida positiva se sigue que para algún entero $i \geq 0$ el conjunto $T^{-i}(A) \cap B$ tiene medida positiva.

Para completar la demostración de la proposición es suficiente demostrar $4 \Rightarrow 1$. Supongamos por contradicción que existe un conjunto invariante A que no tiene medida nula ni total. Entonces A y $B := X \setminus A$ tienen ambas medida positiva y la propiedad 4 implica que existe un entero $n \geq 0$ tal que $T^{-n}(A) = A$ intersecta al conjunto $B = X \setminus A$, lo que es imposible. Esta contradicción completa la demostración de $4 \Rightarrow 1$ y, de la proposición. \square

Proposición 3.8. *Para un sistema dinámico medible (X, \mathcal{F}, μ, T) , las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. T es ergódica;
2. Toda función medible $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $\varphi \circ T = \varphi$ en un subconjunto de medida total, es constante en casi todo punto;
3. Toda función de cuadrado integrable $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $\varphi \circ T = \varphi$ en un subconjunto de medida total, es constante en casi todo punto.

Demostración. Para demostrar $1 \Rightarrow 2$, supongamos que T es ergódica y que $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible tal que $\varphi \circ T = \varphi$ en un conjunto de medida total. Dado un número real c , consideremos el conjunto cuasi-invariante $X_c := \varphi^{-1}((-\infty, c])$. Por otro lado, observemos que existe un entero n_0 tal que el conjunto $\varphi^{-1}((n_0, n_0 + 1])$ tiene medida positiva. Como este último conjunto es cuasi-invariante y T es ergódica, concluimos que $\varphi^{-1}((n_0, n_0 + 1])$ es de medida total. En particular, el conjunto X_{n_0} tiene medida nula y el conjunto X_{n_0+1} tiene medida total. Entonces podemos definir

$$c_0 := \inf\{c \in \mathbb{R} : X_c \text{ tiene medida total}\}.$$

Para cada $c < c_0$ el conjunto X_c tiene medida nula, lo que implica que el conjunto $\varphi^{-1}((-\infty, c_0))$ tiene medida nula. Por otro lado, para cada $c > c_0$ el conjunto X_c tiene medida total y por lo tanto el conjunto $X \setminus X_c$ tiene medida nula. Esto implica que el conjunto $\varphi^{-1}((c_0, +\infty))$ tiene medida nula. Esto demuestra que φ es igual a c_0 en casi todo punto.

La implicación $2 \Rightarrow 3$ siendo trivial, para completar la demostración de la proposición es suficiente demostrar $3 \Rightarrow 1$. Dado un conjunto invariante A , observemos que la función indicatriz $\mathbf{1}_A$ es de cuadrado

integrable y satisface $\mathbb{1}_A \circ T = \mathbb{1}_A$ en X . Por lo tanto $\mathbb{1}_A$ es constante en un conjunto de medida total. Como $\mathbb{1}_A$ solo puede tomar los valores 0 y 1, concluimos que $\mathbb{1}_A^{-1}(0) = X \setminus A$ o que $\mathbb{1}_A^{-1}(1) = A$ es de medida total. Es decir, que A es de medida nula o total. Como esto es valido para cualquier conjunto invariante A , concluimos que T es ergódica. \square

3.6. Punto de vista espectral. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida. Diremos que 2 funciones medibles definidas en X y tomando valores en \mathbb{C} son *equivalentes*, si coinciden en un conjunto de medida total. Denotaremos por $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ el espacio de las clases de equivalencias de funciones medibles $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $\|\varphi\|_2 < +\infty$. Dada un función φ con esta propiedad, por abuso de notación denotaremos por φ su clase de equivalencia en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Para φ y ψ en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ definimos

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int \varphi \cdot \bar{\psi} \, d\mu.$$

Esta función bilineal induce un producto interno en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, para le cual $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de Hilbert.

Dada una transformación medible $T : X \rightarrow X$ y una función medible $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$, definimos

$$U_T \varphi := \varphi \circ T.$$

Lema 3.9. *Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible. Entonces el operador U_T induce un operador lineal del espacio $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ en si mismo, que es una isometría.*

Demostración. Como T preserva medida, si $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones medibles equivalentes, entonces el conjunto

$$\{U_T \varphi \neq U_T \psi\} = T^{-1}(\{\varphi \neq \psi\})$$

es de medida nula, y por lo tanto $U_T \varphi$ y $U_T \psi$ son equivalentes. Si además $\|\varphi\|_2 < +\infty$, entonces la formula de cambio de variable aplicada a $|\varphi|^2$ nos da,

$$\|U_T \varphi\|_2^2 = \int |\varphi \circ T|^2 \, d\mu = \int |\varphi|^2 \circ T \, d\mu = \|\varphi\|_2^2.$$

Esto demuestra que $\|U_T(\varphi)\|_2 < +\infty$ y por lo tanto que U_T induce un operador lineal de $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ es si mismo. Se sigue además que el operador inducido es una isometría. \square

Dado un sistema dinámico medible (X, \mathcal{F}, μ, T) , por abuso de notación denotamos por

$$U_T : L^2(X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$$

el operador definido en el lema anterior.

El siguiente resultado caracteriza la ergodicidad T en términos de propiedades espectrales del operador U_T . Recordemos que para un operador U de $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ en si mismo, un número complejo λ es un *autovalor de U* , si existe φ en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ no nula tal que $U_T\varphi = \lambda\varphi$. En este caso φ es una *autofunción de U para el autovalor λ* . Si cualquier otra autofunción de U para al autovalor λ es un múltiplo escalar de φ , entonces el autovalor λ de U es *simple*.

Si (X, \mathcal{F}, μ, T) es un sistema dinámico medible, entonces el operador U_T satisface $U_T\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_X$ y por lo tanto el número 1 es un autovalor de U_T .

Proposición 3.10. *Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible y U_T el operador correspondiente. Entonces tenemos las siguientes propiedades:*

1. *T es ergódica si y solo si 1 es un autovalor simple del operador U_T ;*
2. *Si T es ergódica, entonces todo autovalor de U_T es simple y el conjunto de los autovalores de U_T es un subgrupo del grupo multiplicativo S^1 .*

Demostración. Para demostrar la parte 1, supongamos que T es ergódica y sea φ una autofunción de U_T para el autovalor 1. Entonces $\varphi \circ T = \varphi$ en un conjunto de medida total, y por la Proposición 3.8 la función φ es constante en un conjunto de medida total. Es decir que φ es un múltiplo escalar de $\mathbb{1}_X$ en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Esto demuestra que el autovalor 1 de U_T es simple. Para demostrar la implicación inversa, supongamos que el autovalor 1 de U_T es simple. Por la Proposición 3.8, para demostrar que T es ergódica es suficiente demostrar que cada φ en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ satisfaciendo $\varphi \circ T = \varphi$ es un múltiplo escalar de $\mathbb{1}_X$. Para una tal φ tenemos $U_T\varphi = \varphi$, y por lo tanto φ es una autofunción de U_T para el autovalor 1, o es nula. Como por hipótesis este autovalor 1 de U_T es simple, en todos los casos se sigue que φ es un múltiplo escalar de $\mathbb{1}_X$. Esto completa la demostración de la parte 1.

Sea λ un autovalor de U_T y sea $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible tal que $\|\varphi\|_2 \in (0, +\infty)$ y tal que $U_T\varphi = \lambda\varphi$ en un conjunto de medida total. Como U_T es una isometría, tenemos

$$\|\varphi\|_2 = \|U_T\varphi\|_2 = \|\lambda\varphi\|_2 = |\lambda| \cdot \|\varphi\|_2,$$

lo que implica que $|\lambda| = 1$. Además, en un conjunto de medida total tenemos

$$|\varphi| = |\lambda\varphi| = |U_T\varphi| = U_T|\varphi|.$$

Por la parte 1 se sigue que $|\varphi|$ es constante en casi todo punto. Reemplazando φ por una función equivalente si es necesario, suponemos que $|\varphi|$ es constante. Para demostrar que el conjunto de los autovalores de U_T forma un subgrupo de S^1 , sea η un autovalor de U_T y sea $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible tal que $\|\psi\|_2 \in (0, +\infty)$ y $U_T\psi = \eta\psi$ en un conjunto de medida total. Entonces la función ψ/φ satisface,

$$U_T(\psi/\varphi) = (U_T\psi)/(U_T\varphi) = (\lambda/\eta)\varphi/\psi$$

en un conjunto de medida total. Esto demuestra que λ/η también es un autovalor de U_T , y por lo tanto que los autovalores de U_T forman un subgrupo de S^1 . Para demostrar que el autovalor λ de U_T es simple, tomemos $\eta = \lambda$. Entonces $U_T(\psi/\varphi) = \varphi/\psi$ en un conjunto de medida total, y por la parte 1 se sigue que φ/ψ es constante en un conjunto de medida total. Esto implica que ψ es equivalente a un múltiplo escalar de φ . Esto completa la demostración de que el autovalor λ de U_T es simple, y de la proposición. \square

3.7. Transformaciones conservativas. El objetivo de esta sección es considerar algunos conceptos relevantes para el caso de espacios de medida infinitos y/o de transformaciones que no preservan medida. Más resultados en esta dirección se pueden encontrar en el libro de Halmos [Hal56] o en el libro de Aaronson [Aar97].

Nota 3.11. Si bien las definiciones siguientes, así como la definición de ergodicidad, están formuladas para un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) , los conceptos solo dependen de la colección de conjuntos de medida nula de μ . Por ejemplo, si μ' es una medida en (X, \mathcal{F}) que comparte los mismos conjuntos de medida nula con μ , entonces una transformación medible $T : X \rightarrow X$ es ergódica con respecto a μ si y solo si es ergódica con respecto a μ' . En particular, si X es una variedad diferenciable y \mathcal{F} es la σ -álgebra de Borel de X , entonces una transformación $T : X \rightarrow X$ que es ergódica con respecto a una forma de volumen en X , es ergódica con respecto a toda forma de volumen en X .

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y $T : X \rightarrow X$ una transformación medible. Un conjunto medible W es *errante* si los conjuntos

$$W, T^{-1}(W), T^{-2}(W), \dots$$

son disjuntos dos a dos. La transformación T es:

- *Conservativa*, si todo conjunto errante tiene medida nula;
- *(Infinitamente) recurrente*, si para cada conjunto de medida positiva A , el conjunto de puntos de A que retorna (infinitas veces) a A tiene medida total en A ;

- *Mediblemente transitiva*, si para cada par de conjuntos de medida positiva A y B , existe un entero $n \geq 1$ tal que $T^{-n}(A) \cap B$ tiene medida positiva.

Observemos que T es mediblemente transitiva, si para cada conjunto de medida positiva A el conjunto $\bigcup_{n=1}^{+\infty} T^{-n}(A)$ es de medida total.

Con esta terminología, el Teorema de Recurrencia de Poincaré (Proposición 3.4) afirma que todo sistema dinámico medible es infinitamente recurrente.

Proposición 3.12. *Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y $T : X \rightarrow X$ una transformación medible. Entonces las propiedades siguientes son equivalentes.*

1. T es conservativa;
2. T es infinitamente recurrente;
2. T es recurrente.

Demostración. Para demostrar $1 \Rightarrow 2$, supongamos que T es conservativa y sea A un conjunto de medida positiva. Para cada entero $n \geq 0$ sea A_n el subconjunto de A de los puntos que retornan exactamente n veces a A . Entonces el conjunto de los puntos de A que retornan infinitas veces a A es igual a

$$A \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que para cada $n \geq 0$ el conjunto A_n tiene medida nula. Esto ultimo sigue del hecho que A_n es errante.

Como $2 \Rightarrow 3$ es trivial, para completar la demostración de la proposición es suficiente demostrar $3 \Rightarrow 1$. Supongamos por contradicción que T es recurrente y W es un conjunto errante de medida positiva. Esto implica que existe un entero $n \geq 1$ tal que $T^{-n}(W)$ intersecta a W y por lo tanto que W no es errante. Esta contradicción completa la demostración de $3 \Rightarrow 1$ y de la proposición. \square

Proposición 3.13. *Dado un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) , una transformación $T : X \rightarrow X$ es mediblemente transitiva si y solo si es conservativa y ergódica.*

Demostración. Supongamos que T es mediblemente transitiva. Para demostrar que T ergódica, supongamos por contradicción que existe un conjunto invariante A de medida positiva, cuyo complemento $B := X \setminus A$ es de medida positiva. Entonces existe un entero $n \geq 1$ tal que $T^{-n}(A) = A$ intersecta a $B = X \setminus A$. Esta contradicción demuestra que T es ergódica. Para demostrar que T es conservativa, por

la Proposición 3.12 es suficiente demostrar que T es recurrente. Sea A un conjunto de medida positiva. Entonces $\bigcup_{j=1}^{+\infty} T^{-j}(A)$ es de medida total y por lo tanto conjunto de los puntos de A que retornan a A tiene medida total en A . Como esto es válido para todo conjunto de medida positiva A , concluimos que T es recurrente.

Supongamos que T es infinitamente recurrente. Para demostrar que T es mediblemente transitiva es suficiente demostrar que para cada conjunto de medida positiva A , el conjunto

$$A' := \bigcup_{i=1}^{+\infty} T^{-i}(A)$$

tiene medida total. Como el conjunto A_∞ de los puntos de A que retornan infinitas veces a A bajo iteración tiene medida total en A , reemplazando A por A_∞ si es necesario, podemos suponer que $A = A_\infty$. Claramente

$$T^{-1}(A') \subset A' \text{ y } A' \setminus T^{-1}(A') \subset A_\infty.$$

Por otro lado, cada punto de A_∞ está contenido en $T^{-1}(A')$. Esto demuestra que A' es invariante y por lo tanto tiene medida nula o total. Como A' contiene al conjunto de medida positiva $A_\infty = A$, concluimos que A' tiene medida total. Esto concluye la demostración la proposición. \square

3.8. Ejemplos de transformaciones ergódicas.

3.8.1. Endomorfismos del círculo. Recordemos que Leb es la medida de probabilidad en \mathbb{R}/\mathbb{Z} inducida por la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Sea $d \geq 2$ un entero, y consideremos la transformación

$$\begin{aligned} m_d : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x &\mapsto m_d(x) := d \cdot x. \end{aligned}$$

Observemos que para todo intervalo I de \mathbb{R}/\mathbb{Z} el conjunto $m_d^{-1}(I)$ es una unión disjunta de d intervalos de longitud igual a la longitud de I dividida por d . En particular,

$$\text{Leb}(m_d^{-1}(I)) = \text{Leb}(I),$$

y por lo tanto Leb es invariante por m_d , ver parte 1 del Teorema A.2.

A continuación demostraremos que m_d es ergódica con respecto a Leb . Restringiéndonos al caso $d = 2$ esto implica que el Teorema 2.2 es una consecuencia inmediata del Teorema 2.4.

Para demostrar que m_d es ergódica con respecto a Leb , es suficiente demostrar que cada función de cuadrado integrable $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $\varphi \circ m_d = \varphi$ en un conjunto de medida total, es constante en

casi todo punto (Proposición 3.8). Para cada entero k consideremos el correspondiente coeficiente de Fourier

$$a_k := \int \varphi(x) \exp(-2\pi i x k) dx$$

de φ . Entonces, para todo x en un conjunto de medida total tenemos

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(2\pi i k x).$$

Luego, es suficiente demostrar que para cada $k \neq 0$ tenemos $a_k = 0$.

Supongamos primeramente que k no es divisible por d . Entonces,

$$\begin{aligned} a_k &= \int \varphi \circ m_d(x) \exp(-2\pi i x k) dx \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \int_{j/d}^{(j+1)/d} \varphi(dx) \exp(-2\pi i x k) dx \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \frac{1}{d} \int \varphi(y) \exp(-2\pi i k(y-j)/d) dy \\ &= \frac{1}{d} \int \varphi(y) \exp(-2\pi i k y/d) dy \cdot \sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i k j/d). \end{aligned}$$

Nuestra hipótesis que k no es divisible por d implica

$$\sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i k j/d) = 0$$

y por lo tanto que $a_k = 0$. Supongamos ahora que k es divisible por d . Entonces existe un entero $\ell \geq 1$ y un entero k_0 que no es divisible por d , tal que $k = d^\ell k_0$. Con esta notación tenemos,

$$\begin{aligned} a_k &= \int \varphi \circ m_d^\ell(x) \exp(-2\pi i x k) dx \\ &= \sum_{j=0}^{d^\ell-1} \int_{j/d^\ell}^{(j+1)/d^\ell} \varphi(d^\ell x) \exp(-2\pi i x d^\ell k_0) dx \\ &= \frac{1}{d^\ell} \sum_{j=0}^{d^\ell-1} \int \varphi(y) \exp(-2\pi i y k_0) dy \\ &= a_{k_0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de que m_d es ergódica.

4. TEOREMAS ERGÓDICOS

Después de demostrar el Teorema Ergódico Puntual en §4.1, en §4.2 demostramos que en este resultado la convergencia al límite también ocurre en los espacios L^p , y en §4.4 identificamos la función límite como una esperanza condicional. Finalmente, en §3.6 caracterizamos la ergodicidad en términos espectrales, y en §4.3 la caracterizamos como decrecimiento a 0 en media de correlaciones.

4.1. Teorema ergódico Puntual. En esta sección daremos una demostración del Teorema Ergódico Puntual, que es también conocido como “Teorema Ergódico de Birkhoff”. Siguiendo [KP06], demostraremos primero una versión fuerte del “Teorema Ergódico Maximal” y obtendremos el Teorema Ergódico Puntual como una consecuencia simple. A parte de las demostraciones que se encuentran en los libros de la bibliografía, otras demostraciones cortas del Teorema Ergódico Puntual se pueden encontrar en [AB09, Ste89], donde se demuestra primeramente el “Teorema Ergódico Subaditivo”.

En toda esta sección fijamos un sistema dinámico medible (X, \mathcal{F}, μ, T) y para cada función medible $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ y cada entero $n \geq 1$, definimos

$$S_n(\varphi) := \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ T^j.$$

El siguiente resultado se conoce frecuentemente como “Teorema Ergódico de Birkhoff”.

Teorema Ergódico Puntual. *Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible y $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible que satisface $\int |\varphi| d\mu < +\infty$. Entonces la sucesión de funciones $(\frac{1}{n}S_n(\varphi))_{n=1}^{+\infty}$ converge puntualmente en un conjunto de medida total a una función medible $\widehat{\varphi} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, que satisface*

$$\int |\widehat{\varphi}| d\mu \leq \int |\varphi| d\mu, \widehat{\varphi} \circ T = \widehat{\varphi}, \text{ y } \int \widehat{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Contrariamente a lo que sugiere el nombre de este resultado, no se supone que la aplicación T es ergódica. En el caso en que T es ergódica, la función invariante $\widehat{\varphi}$ es constante en casi todo punto, igual a $\int \widehat{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$. Por lo tanto, obtenemos el siguiente corolario como una consecuencia inmediata del Teorema Ergódico Puntual.

Corolario 4.1. *Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible ergódico, y sea $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible que satisface $\int |\varphi| d\mu < +\infty$.*

Entonces en un conjunto de medida total tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ T^j = \int \varphi d\mu.$$

Obtendremos el Teorema Ergódico Puntual como una consecuencia simple de la siguiente versión del Teorema Ergódico Maximal. Para enunciar este resultado, para cada función medible $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$\phi^* := \sup \left\{ \frac{1}{j} S_j(\phi) : j \geq 1 \right\},$$

$$\phi^+ = \max\{\phi, 0\} \text{ y } \phi^- = \max\{-\phi, 0\}.$$

Por definición ϕ^+ y ϕ^- son no negativas y tenemos

$$\phi = \phi^+ - \phi^- \text{ y } |\phi| = \phi^+ + \phi^-.$$

Teorema Ergódico Maximal. *Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible, sea $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible que satisface $\int |\varphi| d\mu < +\infty$, y sea $\iota : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $\int \iota^+ d\mu < +\infty$ y tal que $\iota \circ T = \iota$ en un conjunto de medida total con respecto a μ . Entonces,*

$$\int_{\{\varphi^* > \iota\}} \varphi - \iota d\mu \geq 0.$$

Nota 4.2. Usualmente, “Teorema Ergódico Maximal” es el caso particular en que ι es idénticamente nula.

Demostración. Sin pérdida de la generalidad supondremos

$$\int_{\{\varphi^* > \iota\}} \varphi - \iota d\mu < +\infty.$$

Como $\varphi \leq \varphi^*$, esto implica

$$\int \varphi - \iota d\mu \leq \int_{\{\varphi > \iota\}} \varphi - \iota d\mu \leq \int_{\{\varphi^* > \iota\}} \varphi - \iota d\mu < +\infty.$$

Por otro lado

$$\int \varphi - \iota d\mu \geq \int \varphi - \iota^+ d\mu > -\infty,$$

lo que demuestra que $\int |\varphi - \iota| d\mu < +\infty$.

Para cada entero $n \geq 1$, sea

$$\varphi_n^* := \max \left\{ \frac{1}{j} S_j(\varphi) : j \in \{1, \dots, n\} \right\} \text{ y } E_n := \{\varphi_n^* > \iota\}.$$

Observemos que $(\varphi_n^*)_{n=1}^{+\infty}$ es creciente con n y que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n^* = \varphi^*$. Se sigue que $(E_n)_{n=1}^{+\infty}$ es creciente con n , que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \{\varphi^* > \iota\}$, y que

$$((\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{E_n})_{n=1}^{+\infty}$$

converge puntualmente a $(\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{\{\varphi^* > \iota\}}$. Por lo tanto, por el Teorema de Convergencia Dominada es suficiente demostrar que para todo $n \geq 1$ tenemos

$$(4.1) \quad \int (\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{E_n} d\mu \geq 0.$$

Fijemos un entero $n \geq 1$. Como $X \setminus E_n \subset \{\varphi \leq \iota\}$, tenemos

$$(4.2) \quad (\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{E_n} \geq \varphi - \iota.$$

Fijemos x en X tal que para cada entero $j \geq 1$ tengamos $\iota(T^j(x)) = \iota(x)$. Demostraremos que existe un entero k en $\{1, \dots, n\}$, tal que

$$(4.3) \quad \sum_{j=0}^{k-1} (\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{E_n}(T^j(x))$$

es no negativa. Observemos primero que si x no esta en E_n , entonces la suma (4.3) con $k = 1$ es nula. Si x esta en E_n , entonces existe un entero k en $\{1, \dots, n\}$ tal que $\frac{1}{k} S_k(\varphi)(x) > \iota(x)$. Por lo tanto, por (4.2)

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{E_n}(T^j(x)) \geq \sum_{j=0}^{k-1} (\varphi - \iota)(T^j(x)) = S_k(\varphi)(x) - k\iota(x) > 0.$$

Sea $m \geq n$ un entero. Por el argumento anterior existe un entero k en $\{1, \dots, m\}$ tal que la suma (4.3) es no negativa; sea k el mayor entero con esta propiedad. Supongamos por contradicción que $k \leq m - n$. Entonces el argumento anterior aplicado a $T^k(x)$ en vez de x , implicaría la existencia de ℓ en $\{1, \dots, n\}$ tal que

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} (\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{E_n}(T^{k+j}(x)) \geq 0.$$

Pero esto implicaría que la suma (4.3), con k reemplazado por $k + \ell$, es no negativa, lo que contradice la maximalidad de k . Esto demuestra

que $k \geq m + 1 - n$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} S_m((\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{E_n})(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} (\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{E_n}(T^j(x)) \\ &\geq \sum_{j=k}^{m-1} (\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{E_n}(T^j(x)) \\ &\geq - (S_{m-k}(|\varphi|)(T^k(x)) + (m-k)\iota^+(x)). \\ &\geq - (S_n(|\varphi|)(T^{m-n}(x)) + n\iota^+(x)). \end{aligned}$$

Como $\iota \circ T = \iota$ en un conjunto de medida total y como la cadena de desigualdades anterior es válida para todo x en X tal que para cada entero $j \geq 1$ tenemos $\iota(T^j(x)) = \iota(x)$, integrando y dividiendo por m obtenemos

$$\int (\varphi - \iota) \cdot \mathbf{1}_{E_n} d\mu \geq -\frac{n}{m} \left(\int |\varphi| d\mu + \int \iota^+ d\mu \right).$$

Como el lado izquierdo es independiente de m , haciendo $m \rightarrow +\infty$ obtenemos (4.1), lo que concluye la demostración. \square

Para demostrar el Teorema Ergódico Puntual, para cada función $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, sea $\widehat{\phi} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ la función definida por,

$$\widehat{\phi} := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n(\phi).$$

Observemos que $\widehat{\phi} \circ T = \widehat{\phi}$ en todo X , y que $\widehat{\phi}$ es medible si ϕ lo es.

Lema 4.3. *Si $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible que es no negativa y de integral finita, entonces*

$$\int \widehat{\phi} d\mu \leq \int \phi d\mu.$$

Demostración. Observemos que para cada $M > 0$ la función acotada

$$\widehat{\phi}_M := \min\{\widehat{\phi}, M\} - \frac{1}{M}$$

satisface

$$\widehat{\phi}_M \circ T = \widehat{\phi}_M \text{ y } \phi^* \geq \widehat{\phi} > \widehat{\phi}_M$$

en todo X . Por lo tanto el Teorema Ergódico Maximal con $\varphi = \phi$ y $\iota = \widehat{\phi}_M$, implica

$$\int \phi d\mu \geq \int \widehat{\phi}_M d\mu.$$

Luego, por el teorema de convergencia monótona de Lebesgue,

$$\int \widehat{\phi} d\mu = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int \widehat{\phi}_M d\mu \leq \int \phi d\mu.$$

□

Demostración del Teorema Ergódico Puntual. Como

$$(\widehat{\varphi})^+ \leq \widehat{(\varphi^+)} \text{ y } (\widehat{\varphi})^- \leq \widehat{(\varphi^-)},$$

el lema anterior con $\phi = \varphi^+$ y $\phi = \varphi^-$ implica

$$\int (\widehat{\varphi})^+ d\mu \leq \int \varphi^+ d\mu \text{ y } \int (\widehat{\varphi})^- d\mu \leq \int \varphi^- d\mu.$$

Por lo tanto $\int |\widehat{\varphi}| d\mu \leq \int |\varphi| d\mu$.

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos la función $\iota := \widehat{\varphi} - \varepsilon$. Claramente $\iota \circ T = \iota$ en todo X y $\int \iota^+ d\mu \leq \int (\widehat{\varphi})^+ d\mu < +\infty$. Como además tenemos, $\varphi^* \geq \widehat{\varphi} > \iota$ en todo X , el Teorema Ergódico Maximal implica

$$\int \varphi d\mu \geq -\varepsilon + \int \widehat{\varphi} d\mu.$$

Como esta desigualdad es válida para cualquier $\varepsilon > 0$, concluimos que $\int \varphi d\mu \geq \int \widehat{\varphi} d\mu$. Repitiendo el argumento con $-\varphi$ en vez de φ , obtenemos $\int \varphi d\mu \leq \int -\widehat{(-\varphi)} d\mu$. Como $-\widehat{(-\varphi)}$ es igual a la función $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n(\varphi)$, hemos demostrado

$$\int \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n(\varphi) d\mu \leq \int \varphi d\mu \leq \int \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n(\varphi) d\mu.$$

Luego $\int \widehat{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$ y en un conjunto de medida total tenemos

$$\widehat{\varphi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n(\varphi).$$

□

4.2. Convergencia en el espacio L^p . En esta sección fijamos un sistema dinámico medible (X, \mathcal{F}, μ, T) . Dado $p \geq 1$ y una función medible $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$\|\varphi\|_p := \left(\int |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observemos que para $p' \geq p$, tenemos $\|\varphi\|_{p'} \geq \|\varphi\|_p$.

Corolario 4.4. Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible, sea $p \geq 1$, y sea $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible que satisface $\|\varphi\|_p < +\infty$. Entonces la función $\widehat{\varphi}$ dada por el Teorema Ergódico Puntual satisface

$$\|\widehat{\varphi}\|_p < +\infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{n} S_n(\varphi) - \widehat{\varphi} \right\|_p = 0.$$

Demostración. Dada una función medible $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $M > 0$, denotamos

$$\phi_M := \phi \cdot \mathbb{1}_{\{|\phi| \leq M\}}.$$

Si además $\|\phi\|_1 < +\infty$, entonces denotamos por $\widehat{\phi}$ la función dada por el Teorema Ergódico Puntual. Observemos que para cada $p' \geq 1$ y cada función $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $\|\phi\|_{p'} < +\infty$, tenemos para cada entero $n \geq 1$

$$(4.4) \quad \left\| \frac{1}{n} S_n(\phi) \right\|_{p'} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|\phi \circ T^j\|_{p'} = \|\phi\|_{p'}.$$

1. Supongamos que $p = 1$. Por el Teorema Ergódico Puntual, tenemos $\|\widehat{\varphi}\|_1 \leq \|\varphi\|_1 < +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $M > 0$ suficientemente grande tal que $\|\varphi - \varphi_M\|_1 < \varepsilon/3$. Como $\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}_M = \widehat{\varphi - \varphi_M}$ en un conjunto de medida total, por el Teorema Ergódico Puntual tenemos

$$(4.5) \quad \|\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}_M\|_1 \leq \|\varphi - \varphi_M\|_1 < \varepsilon/3.$$

Por otro lado, como la función φ_M es acotada, el Teorema Ergódico de Brikhoff y el Teorema de Convergencia Acotada implican que existe $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ tenemos

$$\left\| \frac{1}{n} S_n(\varphi_M) - \widehat{\varphi}_M \right\|_1 < \varepsilon/3.$$

Entonces por (4.4) y (4.5) tenemos,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{n} S_n(\varphi) - \widehat{\varphi} \right\|_1 \\ & \leq \left\| \frac{1}{n} S_n(\varphi) - \frac{1}{n} S_n(\varphi_M) \right\|_1 + \left\| \frac{1}{n} S_n(\varphi_M) - \widehat{\varphi}_M \right\|_1 + \|\widehat{\varphi}_M - \widehat{\varphi}\|_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\left\| \frac{1}{n} S_n(\varphi) - \widehat{\varphi} \right\|_1 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, y completa la demostración del corolario en el caso en que $p = 1$.

2. Supongamos que $p > 1$. Demostraremos que $\left(\frac{1}{n} S_n(\varphi) \right)_{n=1}^{+\infty}$ es un sucesión de Cauchy con respecto a la semi-norma $\|\cdot\|_p$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $M > 0$ suficientemente grande tal que $\|\varphi - \varphi_M\|_p < \varepsilon/3$. Como la función φ_M es acotada y por el Teorema Ergódico Puntual $\left(\frac{1}{n} S_n(\varphi_M) \right)_{n=1}^{+\infty}$ converge

puntualmente a $\widehat{\varphi}_M$ en un conjunto de medida total, por el Teorema de Convergencia Acotada tenemos que $(\frac{1}{n}S_n(\varphi_M))_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a la semi-norma $\|\cdot\|_p$. Por lo tanto, existe $n_0 \geq 0$ tal que para todo $n, n' \geq n_0$ tenemos

$$\left\| \frac{1}{n}S_n(\varphi_M) - \frac{1}{n'}S_{n'}(\varphi_M) \right\|_p < \varepsilon/3.$$

Luego, usando la definición de M y (4.4) 2 veces, para todo $n, n' \geq n_0$ tenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{n}S_n(\varphi) - \frac{1}{n'}S_{n'}(\varphi) \right\|_p \\ & \leq \left\| \frac{1}{n}S_n(\varphi) - \frac{1}{n}S_n(\varphi_M) \right\|_p + \left\| \frac{1}{n}S_n(\varphi_M) - \frac{1}{n'}S_{n'}(\varphi_M) \right\|_p \\ & \quad + \left\| \frac{1}{n'}S_{n'}(\varphi_M) - \frac{1}{n'}S_{n'}(\varphi) \right\|_p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $(\frac{1}{n}S_n(\varphi))_{n=1}^{+\infty}$ es un sucesión de Cauchy con respecto a la semi-norma $\|\cdot\|_p$.

Por lo tanto existe una función $\tilde{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\|\tilde{\varphi}\|_p < +\infty \text{ y } \left\| \frac{1}{n}S_n(\varphi) - \tilde{\varphi} \right\|_p \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Luego, para concluir la demostración del corolario es suficiente demostrar que $\tilde{\varphi} = \widehat{\varphi}$ en un conjunto de medida total. Para demostrar esto, observemos que $\|\tilde{\varphi}\|_1 \leq \|\tilde{\varphi}\|_p < +\infty$ y que $\|\frac{1}{n}S_n(\varphi) - \tilde{\varphi}\|_1 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Por la parte 1, concluimos que $\|\tilde{\varphi} - \widehat{\varphi}\|_1 = 0$, y por lo tanto que $\tilde{\varphi} = \widehat{\varphi}$ en un conjunto de medida total. \square

4.3. Decrecimiento de correlaciones en media. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de probabilidad. Entonces cada función medible $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ define una variable aleatoria. Recordemos que 2 variables aleatorias $\phi, \tilde{\phi} : X \rightarrow \mathbb{R}$ son *independientes*, si para cada par de números reales a y \tilde{a} tenemos

$$\mu \left(\{\phi \leq a\} \cap \{\tilde{\phi} \leq \tilde{a}\} \right) = \mu(\{\phi \leq a\}) \cdot \mu(\{\tilde{\phi} \leq \tilde{a}\}),$$

o equivalentemente

$$\int \mathbf{1}_{\{\phi \leq a\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tilde{\phi} \leq \tilde{a}\}} d\mu = \left(\int \mathbf{1}_{\{\phi \leq a\}} d\mu \right) \left(\int \mathbf{1}_{\{\tilde{\phi} \leq \tilde{a}\}} d\mu \right).$$

En vista de lo anterior, para funciones medibles $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ podemos interpretar a

$$\text{Cor}(\varphi, \psi) := \left| \int \varphi \cdot \psi \, d\mu - \left(\int \varphi \, d\mu \right) \left(\int \psi \, d\mu \right) \right|,$$

como una medida de la falta de independencia entre φ y ψ . Este número es llamado la *correlación entre φ y ψ* .

Sea $T : X \rightarrow X$ una transformación medible que preserva la medida μ . Para cada función medible $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, consideramos la sucesión de funciones medibles $(\varphi \circ T^n)_{n=1}^{+\infty}$, vista como una sucesión de variables aleatorias (“la evolución de la variable aleatoria φ en el tiempo”). Dada una función medible $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$, definimos para cada entero $n \geq 0$ la *n-ésima correlación entre φ y ψ* por,

$$\begin{aligned} \text{Cor}_n(\varphi, \psi) &:= \text{Cor}(\varphi \circ T^n, \psi) \\ &= \left| \int \varphi \circ T^n \cdot \psi \, d\mu - \left(\int \varphi \, d\mu \right) \left(\int \psi \, d\mu \right) \right|. \end{aligned}$$

Informalmente, el siguiente resultado interpreta la ergodicidad como el decrecimiento a 0 en media de las correlaciones.

Proposición 4.5. *Para todo sistema dinámico medible (X, \mathcal{F}, μ, T) , las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. T es ergódica;
2. Para todo par de funciones medibles $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $\|\varphi\|_2, \|\psi\|_2 < +\infty$, tenemos

$$(4.6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int \varphi \circ T^j \cdot \psi \, d\mu = \left(\int \varphi \, d\mu \right) \left(\int \psi \, d\mu \right);$$

3. Para todo par de conjuntos medible A y B , tenemos

$$(4.7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

4. Para todo conjunto medible A , tenemos

$$(4.8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap A) = \mu(A)^2.$$

Demostración. Para demostrar la implicación $1 \Rightarrow 2$, sea $\widehat{\varphi}$ la función dada por el Teorema Ergódico Puntual. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos para cada entero $n \geq 1$,

$$\left| \left\langle \frac{1}{n} S_n(\varphi), \overline{\psi} \right\rangle - \langle \widehat{\varphi}, \overline{\psi} \rangle \right| \leq \left\| \frac{1}{n} S_n(\varphi) - \widehat{\varphi} \right\|_2 \cdot \|\overline{\psi}\|_2.$$

Por lo tanto el Corolario 4.4 implica

(4.9)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int \varphi \circ T^j \cdot \psi \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{1}{n} S_n(\varphi) \cdot \psi \, d\mu = \int \widehat{\varphi} \cdot \psi \, d\mu.$$

Si T es ergódica, entonces $\widehat{\varphi}$ es constante en casi todo punto, igual a $\int \varphi \, d\mu$, y por lo tanto obtenemos la propiedad 2; es decir, $1 \Rightarrow 2$.

Para demostrar la implicación $2 \Rightarrow 3$ es suficiente tomar $\varphi = \mathbb{1}_A$ y $\psi = \mathbb{1}_B$ en (4.6), y para demostrar $3 \Rightarrow 4$ es suficiente tomar $B = A$ en (4.7). Para demostrar la implicación $3 \Rightarrow 1$, sea A un conjunto invariante y observemos que el lado izquierdo de (4.7) con $B = X \setminus A$ es igual a 0. Por lo tanto,

$$\mu(A) \cdot \mu(X \setminus A) = 0;$$

equivalentemente, A es de medida nula o total. Esto demuestra que T es ergódica y completa la demostración de la implicación $3 \Rightarrow 1$.

Para completar la demostración de la proposición es suficiente demostrar la implicación $4 \Rightarrow 3$. Dado un conjunto medible A , demostraremos que toda ψ en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ tenemos (4.6) con $\varphi = \mathbb{1}_A$. Entonces para un conjunto medible B dado, obtendremos (4.7) tomando $\psi = \mathbb{1}_B$. Por (4.9) es suficiente demostrar que el conjunto E de todas las funciones ψ en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ para las cuales

$$\langle \widehat{\mathbb{1}_A}, \overline{\psi} \rangle = \mu(A) \left(\int \psi \, d\mu \right),$$

es igual a todo $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Observemos que E es un subespacio cerrado de $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ que contiene a $\mathbb{1}_X$. La propiedad 4 implica que $\widehat{\mathbb{1}_A}$ también está en E . Por otro lado, por la invariancia de $\widehat{\mathbb{1}_A}$ y por la fórmula de cambio de variable, para cada ψ en E tenemos

$$\langle \widehat{\mathbb{1}_A}, \overline{\psi \circ T} \rangle = \langle \widehat{\mathbb{1}_A} \circ T, \overline{\psi \circ T} \rangle = \langle \widehat{\mathbb{1}_A}, \overline{\psi} \rangle.$$

Esto demuestra que $U_T \psi$ está en E . Sea E_0 el menor subespacio cerrado de $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ que contiene a $\mathbb{1}_A$ y a $\mathbb{1}_X$ y tal que $U_T E_0 \subset E_0$. Por las observaciones anteriores tenemos $E_0 \subset E$. Luego, para completar la demostración de la implicación $4 \Rightarrow 2$ es suficiente demostrar que el espacio ortogonal E_0^\perp de E_0 está contenido en E . Por la definición de E_0 se sigue que para cada entero $j \geq 0$ la función $\mathbb{1}_A \circ T^j$ está en E_0 . Luego, para cada ψ en E_0^\perp y cada entero $n \geq 1$, tenemos

$$\left\langle \frac{1}{n} S_n(\mathbb{1}_A), \overline{\psi} \right\rangle = 0,$$

y por lo tanto $\langle \widehat{\mathbb{1}_A}, \overline{\psi} \rangle = 0$. Por otro lado,

$$\int \psi \, d\mu = \langle \mathbb{1}_X, \overline{\psi} \rangle = 0.$$

Esto demuestra que ψ esta en E y concluye la demostración de la implicación $4 \Rightarrow 2$. \square

4.4. Función limite como una esperanza condicional. El propósito de esta sección es identificar la función limite en el Teorema Ergódico Puntual como una esperanza condicional. Resultados básicos sobre esperanzas condicionales se pueden encontrar en [Bil95, §34].

En esta sección fijamos un sistema dinámico medible (X, \mathcal{F}, μ, T) . Recordemos que para cada σ -álgebra \mathcal{F}' contenida en \mathcal{F} y para cada función $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ que es medible con respecto a \mathcal{F} , existe una función $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{F}') : X \rightarrow \mathbb{R}$, que es medible con respecto a \mathcal{F}' y que satisface para cada A en \mathcal{F}' ,

$$(4.10) \quad \int_A \varphi \, d\mu = \int_A \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{F}') \, d\mu.$$

La función $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{F}')$ esta únicamente determinada por esta propiedad en un conjunto de medida total y es llamada la *esperanza condicional de φ con respecto a \mathcal{F}'* .

Observemos que la colección \mathcal{I} de todos los subconjuntos medibles de X que son cuasi-invariantes por T es una σ -álgebra. Además, toda función $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ que es medible con respecto a \mathcal{I} , satisface $\phi \circ T = \phi$ en un conjunto de medida total. Por lo tanto, el siguiente resultado es un refinamiento del Teorema Ergódico Puntual.

Corolario 4.6. *Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible y sea $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $\int |\varphi| \, d\mu < +\infty$. Entonces*

$$\int |\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I})| \, d\mu \leq \int |\varphi| \, d\mu, \quad \int \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I}) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu,$$

y tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n(\varphi) = \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I})$$

en un conjunto de medida total.

Demostración. La igualdad $\int \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I}) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu$ sigue de (4.10) con $A = X$. Por otro lado, esta propiedad aplicada al conjunto cuasi-invariante $A = \{\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I}) > 0\}$, implica

$$\int_{\{\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I}) > 0\}} \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I}) \, d\mu = \int_{\{\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I}) > 0\}} \varphi \, d\mu \leq \int_{\{\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I}) > 0\}} |\varphi| \, d\mu.$$

Similarmente,

$$\int_{\{\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I})<0\}} -\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I}) \, d\mu = \int_{\{\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I})<0\}} -\varphi \, d\mu \leq \int_{\{\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I})<0\}} |\varphi| \, d\mu.$$

Esto demuestra que $\int |\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I})| \, d\mu \leq \int |\varphi| \, d\mu$.

Para demostrar la última aserción, es suficiente demostrar que $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I})$ coincide en un conjunto de medida total con la función $\widehat{\varphi}$ dada por el Teorema Ergódico Puntual. Luego, es suficiente demostrar que para todo conjunto cuasi-invariante A tenemos

$$\int_A \widehat{\varphi} \, d\mu = \int_A \varphi \, d\mu.$$

Es suficiente restringirnos al caso en que A es de medida positiva. Por el Lema 3.6 podemos suponer que A es invariante. Aplicando el Teorema Ergódico Puntual a la función $\varphi \cdot \mathbf{1}_A$, obtenemos

$$\int \widehat{\varphi \cdot \mathbf{1}_A} \, d\mu = \int_A \varphi \, d\mu.$$

Como evidentemente $\widehat{\varphi \cdot \mathbf{1}_A} = \widehat{\varphi} \cdot \mathbf{1}_A$, obtenemos $\int_A \widehat{\varphi} \, d\mu = \int_A \varphi \, d\mu$, lo que completa la demostración del corolario. \square

5. APLICACIONES MEZCLANTES

Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible. En §4.3 demostramos que la ergodicidad es equivalente al decrecimiento a 0 en media de las correlaciones de cualquier par de funciones de cuadrado integrable (Proposición 4.3). En esta sección estudiamos las aplicaciones para las cuales la correlaciones decrecen hacia 0.

Recordemos que para un entero $n \geq 0$ y un sistema dinámico medible (X, \mathcal{F}, μ, T) , n -ésima correlación entre dos funciones de cuadrado integrable $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$\text{Cor}_n(\varphi, \psi) = \left| \int \varphi \circ T^n \cdot \psi \, d\mu - \left(\int \varphi \, d\mu \right) \left(\int \psi \, d\mu \right) \right|.$$

Definición 5.1. Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible. La aplicación T es *mezclante** si para cada par de funciones medibles $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo $\|\varphi\|_2, \|\psi\|_2 < +\infty$, tenemos

$$(5.1) \quad \text{Cor}_n(\varphi, \psi) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Usando la topología débil en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, tenemos que T es mezclante si y solo si para cada φ en L^2 la sucesión $(\varphi \circ T^n)_{n=1}^{+\infty}$ converge débilmente a la función constante igual a $\int \varphi \, d\mu$.

Se sigue de la Proposición 4.3 que toda aplicación mezclante es ergódica. Usaremos las traslaciones del toro para demostrar que la implicación inversa no es válida en general: Demostraremos que ninguna traslación del toro es mezclante, ver §5.1. Por otro lado, demostraremos que las “aplicaciones de desplazamiento” son mezclantes y usaremos este resultado para obtener la Ley de Los Grandes Números como una consecuencia del Teorema Ergódico Puntual, ver §5.2. Antes, consideraremos las siguientes caracterizaciones de las aplicaciones mezclantes.

Proposición 5.2. *Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. T es mezclante;
2. Para todo par de conjuntos medibles A y B tenemos

$$(5.2) \quad \mu(T^{-n}(A) \cap B) \rightarrow \mu(A) \cdot \mu(B),$$

cuando $n \rightarrow +\infty$.

3. Para todo conjunto medible A tenemos

$$\mu(T^{-n}(A) \cap A) \rightarrow \mu(A)^2,$$

cuando $n \rightarrow +\infty$.

*A esta propiedad se le conoce también como “fuertemente mezclante” para diferenciarla de una propiedad estrechamente relacionada que es más débil.

Demostración. Para demostrar la implicación $1 \Rightarrow 2$ es suficiente tomar $\varphi = \mathbb{1}_A$ y $\psi = \mathbb{1}_B$ en (5.1), y la para demostrar la implicación $2 \Rightarrow 3$ es suficiente tomar $B = A$ en (5.2).

Para demostrar la implicación $3 \Rightarrow 1$, demostraremos primeramente que para cada conjunto medible A , el conjunto E de todas la funciones ψ en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ para las cuales tenemos (5.1) con $\varphi = \mathbb{1}_A$, es igual a todo $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Claramente, E es un subespacio cerrado de $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Por otro lado, si ψ esta en E , entonces por la formula de cambio de variable tenemos,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi \circ T^n \cdot \psi \circ T \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi \circ T^{n-1} \cdot \psi \, d\mu \\ &= \mu(A) \int \psi \, d\mu = \mu(A) \int \psi \circ T \, d\mu, \end{aligned}$$

lo que demuestra que $U_T \psi = \psi \circ T$ esta en E . Sea E_0 el menor subespacio cerrado de $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ que contiene a $\mathbb{1}_X$ y a $\mathbb{1}_A$ y tal que $U_T E_0 \subset E_0$. Por las consideraciones anteriores E_0 esta contenido en E . Luego, para completar la demostración de que E es igual a todo $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, es suficiente demostrar que el espacio ortogonal E_0^\perp de E_0 esta contenido en E . Como para cada entero $n \geq 0$ tenemos $U_T^n E_0 \subset E_0$, para cada ψ en E_0^\perp tenemos

$$\int \mathbb{1}_A \circ T^n \cdot \psi \, d\mu = 0,$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \mathbb{1}_A \circ T^n \cdot \psi \, d\mu = 0.$$

Como $\int \psi \, d\mu = \int \mathbb{1}_X \cdot \psi \, d\mu = 0$, concluimos que ψ también esta en E . Esto completa la demostración de que E es igual a todo $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Para completar la demostración de $3 \Rightarrow 1$, observemos que el argumento anterior implica (5.1) cuando φ es una función simple. Dada una función φ en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ cualquiera y $\varepsilon > 0$, sea $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función simple tal que $\|\varphi - h\|_2 < \varepsilon$. Entonces

$$\left| \int \varphi \, d\mu - \int h \, d\mu \right| \leq \|\varphi - h\|_2 \leq \varepsilon,$$

y para cada $n \geq 1$ tenemos

$$\left| \int \varphi \circ T^n \cdot \psi \, d\mu - \int h \circ T^n \cdot \psi \, d\mu \right| \leq \|\varphi \circ T^n\|_2 \cdot \|\psi\|_2 \leq \varepsilon \|\psi\|_2.$$

Luego

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi \circ T^n \cdot \psi \, d\mu &\leq \left(\int h \, d\mu \right) \left(\int \psi \, d\mu \right) + \varepsilon \|\psi\|_2 \\ &\leq \left(\int \varphi \, d\mu \right) \left(\int \psi \, d\mu \right) + \varepsilon \left(\int \psi \, d\mu + \|\psi\|_2 \right). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi \circ T^n \cdot \psi \, d\mu \geq \left(\int \varphi \, d\mu \right) \left(\int \psi \, d\mu \right) - \varepsilon \left(\int \psi \, d\mu + \|\psi\|_2 \right).$$

Como esto es valido para cualquier $\varepsilon > 0$, obtenemos (5.1). Esto completa la demostración de la proposición. \square

5.1. Las traslaciones del toro no son mezclantes. Sea $d \geq 1$ un entero, $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ en $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, y sea $T_\alpha : \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ la traslación $T_\alpha(x) = x + \alpha$. La aplicación T_α preserva la medida de Haar de $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ y por lo tanto define un sistema dinámico medible. Como demostramos anteriormente, si los números $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ son racionalmente independientes, entonces T_α es ergódica.

Demostremos que T_α no es mezclante. Para ello, usaremos la siguiente propiedad espectral de las aplicaciones mezclantes.

Proposición 5.3. *Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible tal que la aplicación T es mezclante. Entonces el operador U_T , actuando en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, no tiene ningún autovalor distinto de 1.*

Demostración. Sea λ un autovalor de U_T y sea φ en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ distinta de 0, tal que $U_T\varphi = \lambda\varphi$. Sea ψ en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que $\int \varphi \cdot \psi \, d\mu \neq 0$. Como T es mezclante, el limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi \circ T^n \cdot \psi \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lambda^n \int \varphi \cdot \psi \, d\mu \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n \right) \int \varphi \cdot \psi \, d\mu. \end{aligned}$$

existe. Como por la Proposición 3.10 tenemos $|\lambda| = 1$, el último limite solo puede existir cuando $\lambda = 1$. \square

Volviendo a la traslación T_α , observemos que para j in $\{1, \dots, d\}$ la aplicación

$$\pi_j : \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \rightarrow S^1$$

definida por $\pi_j(\theta_1, \dots, \theta_d) := \exp(2\pi i\theta_j)$, es tal que

$$U_{T_\alpha} \pi_j(\theta_1, \dots, \theta_d) = \exp(2\pi i(\theta_j + \alpha_j)) = \exp(2\pi i\alpha_j) \pi_j(\theta_1, \dots, \theta_d).$$

Luego $\exp(2\pi i\alpha_j)$ es un autovalor de U_{T_α} y π_j es una autofunción de U_{T_α} . Por lo tanto, cuando $\alpha_j \neq 0$ la Proposición 5.3 implica que T_α no es mezclante. Por otro lado, si $\alpha_1 = \dots = \alpha_d = 0$, entonces T_α es la identidad y por lo tanto no es mezclante.

5.2. Aplicación de desplazamiento. Sea \mathcal{B} la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} , ρ una medida Boreliana de probabilidad en \mathbb{R} , y consideremos en el espacio de probabilidad producto $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, \rho^{\mathbb{N}})$. Entonces la *aplicación de desplazamiento* $\sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ esta definida por

$$\sigma((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

El objetivo de esta sección es demostrar la siguiente proposición.

Proposición 5.4. *La aplicación de desplazamiento σ preserva la medida $\rho^{\mathbb{N}}$ y es mezclante. En particular, σ es ergódica.*

Para demostrar esta proposición, usaremos el siguiente lema en el que usamos el concepto de semi-álgebra que recordamos en el Apéndice A.

Lema 5.5. *Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema dinámico medible y sea \mathcal{S} una semi-álgebra en X que genera a \mathcal{F} . Si para cada par de conjuntos A y B en \mathcal{S} se tiene (5.2), entonces T es mezclante.*

Demostración. Dado B en \mathcal{S} demostraremos que la colección \mathcal{F}_B de todos los subconjuntos medibles A para los cuales tenemos (5.2) es igual a \mathcal{F} . Por hipótesis \mathcal{F}_B contiene a \mathcal{S} . Por otro lado, \mathcal{F}_B es cerrada por complemento en X y por uniones finitas disjuntas. Como el álgebra \mathcal{A} generada por \mathcal{S} es igual a la colección de todas las uniones finitas disjuntas de elementos de \mathcal{S} , se sigue que \mathcal{F}_B contiene a \mathcal{A} . Luego, en vista de la Proposición A.1, para demostrar que \mathcal{F}_B es igual a \mathcal{F} es suficiente demostrar que \mathcal{F}_B es una clase monótona; es decir, que \mathcal{F}_B es cerrada por uniones enumerables crecientes y por intersecciones enumerables decrecientes. Sea $(A_m)_{m=1}^{+\infty}$ una sucesión creciente de elementos de \mathcal{F}_B , sea $A := \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m$, y observemos que

$$\mu(A \setminus A_m) \rightarrow 0 \text{ cuando } m \rightarrow +\infty.$$

Dado $m \geq 1$, para cada $n \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} |\mu(T^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| &\leq |\mu(T^{-n}(A) \cap B) - \mu(T^{-n}(A_m) \cap B)| \\ &\quad + |\mu(T^{-n}(A_m) \cap B) - \mu(A_m)\mu(B)| \\ &\quad + |\mu(A) - \mu(A_m)|\mu(B) \\ &\leq \mu(A \setminus A_m)(1 + \mu(B)) \\ &\quad + |\mu(T^{-n}(A_m) \cap B) - \mu(A_m)\mu(B)|. \end{aligned}$$

Haciendo $n \rightarrow +\infty$ obtenemos,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\mu(T^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq \mu(A \setminus A_m)(1 + \mu(B)).$$

Haciendo $m \rightarrow +\infty$ concluimos que A esta en \mathcal{F}_B . Esto demuestra que \mathcal{F}_B es cerrada por uniones enumerables crecientes. Un argumento similar demuestra que \mathcal{F}_B es cerrada por intersecciones enumerables decrecientes y por lo tanto que \mathcal{F}_B es igual a \mathcal{F} .

Usando un argumento similar podemos demostrar que para cada conjunto medible A , la colección de los conjuntos medibles B para los cuales tenemos (5.2) es igual a \mathcal{F} . Entonces la Proposición 5.2 implica que T es mezclante. \square

Recordemos que un subconjunto C de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un *cilindro*, si existe un entero $k \geq 1$ y conjuntos borelianos A_1, \dots, A_k de \mathbb{R} tal que

$$(5.3) \quad C = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times \prod_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{R}.$$

Los cilindros de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ forman una semi-álgebra. Por definición, $\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ es la σ -álgebra generada por esta semi-álgebra. Recordemos además que si C es el cilindro definido por (5.3), entonces

$$\rho^{\mathbb{N}}(A) = \rho(A_1) \cdots \rho(A_k).$$

Demostración de la Proposición 5.4. Por la parte 1 del Teorema A.2, para demostrar que σ preserva $\rho^{\mathbb{N}}$ es suficiente demostrar que para todo cilindro C de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tenemos $\rho^{\mathbb{N}}(\sigma^{-1}(C)) = \rho^{\mathbb{N}}(C)$. Observemos simplemente que si C esta definido por (5.3), entonces

$$\sigma^{-1}(C) = \mathbb{R} \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times \prod_{n=k+2}^{+\infty} \mathbb{R},$$

y por lo tanto,

$$\rho^{\mathbb{N}}(\sigma^{-1}(C)) = \rho(A_1) \cdots \rho(A_k) = \rho^{\mathbb{N}}(C).$$

Esto demuestra que σ preserva $\rho^{\mathbb{N}}$.

Para demostrar que σ es mezclante, por el Lema 5.5 es suficiente demostrar que para cada par de cilindros C y C' tenemos

$$\rho^{\mathbb{N}}(\sigma^{-n}(C) \cap C') \rightarrow \rho^{\mathbb{N}}(C) \cdot \rho^{\mathbb{N}}(C') \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Sean $k \geq 1$, $k' \geq 1$ enteros y $A_1, \dots, A_k, A'_1, \dots, A'_{k'}$ subconjuntos borelianos de \mathbb{R} tal tenemos (5.3) y

$$C' = A'_1 \times \cdots \times A'_{k'} \times \prod_{n=k'+1}^{+\infty} \mathbb{R}.$$

Entonces para todo entero $n \geq k' + 1$ tenemos,

$$\sigma^{-n}(C) \cap C' = A'_1 \times \cdots \times A'_{k'} \times \prod_{j=k'+1}^n \mathbb{R} \times A_1 \times \cdots \times A_k \times \prod_{n=k+n+1}^{+\infty} \mathbb{R},$$

y por lo tanto

$$\rho^{\mathbb{N}}(\sigma^{-n}(C) \cap C') = \rho^{\mathbb{N}}(C) \cdot \rho^{\mathbb{N}}(C').$$

Esto completa la demostración que σ es mezclante y del lemma. \square

5.3. Ley fuerte de los grandes números. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, de esperanza finita. En esta sección demostraremos la Ley Fuerte de los Grandes Números, que con probabilidad total

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}(X_1), \text{ cuando } n \rightarrow +\infty,$$

usando el Teorema Ergódico Puntual.

Sea ρ la distribución común de estas variables aleatorias, y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \Pi : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \omega &\mapsto \Pi(\omega) := (X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Para cada n en \mathbb{N} consideremos la proyección

$$\begin{aligned} \pi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto x_n, \end{aligned}$$

y observemos que

$$\pi_n = \pi_1 \circ \sigma^{n-1} \text{ y } X_n = \pi_n \circ \Pi = \pi_1 \circ \sigma^{n-1} \circ \Pi.$$

Por lo tanto, para cada n y ω en Ω tenemos,

$$\begin{aligned} &\frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} \\ &= \frac{\pi_1(\Pi(\omega)) + \pi_1 \circ \sigma(\Pi(\omega)) + \cdots + \pi_1 \circ \sigma^{n-1}(\Pi(\omega))}{n}; \end{aligned}$$

es la media temporal de la función π_1 en el punto $\Pi(\omega)$, con respecto a la aplicación σ . Como σ es ergódica por la Proposición 5.4, la Ley Fuerte de los Grandes Números es una consecuencia inmediata del Teorema Ergódico Puntual y del siguiente lema.

Lema 5.6. *Tenemos $\Pi_*\mathbb{P} = \rho^{\mathbb{N}}$, y por lo tanto $\mathbb{E}(X_1) = \int \pi_1 d\mu$.*

Demostración. Como los cilindros de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ forman una semi-álgebra, por la parte 1 del Teorema A.2 es suficiente demostrar que para cada cilindro C de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tenemos $\mathbb{P}(\Pi^{-1}(C)) = \rho^{\mathbb{N}}(C)$. Sea $k \geq 1$ un entero y A_1, \dots, A_k subconjuntos borelianos de \mathbb{R} tales que

$$C = A_1 \times \cdots \times A_k \times \prod_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{R}.$$

Usando la definición de Π y la hipótesis que las variables aleatorias X_1, \dots, X_k son independientes entre sí, tenemos

$$\mathbb{P}(\Pi^{-1}(C)) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_k \in A_k) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_k \in A_k).$$

Como para cada j en $\{1, \dots, k\}$ la distribución de X_j es igual a ρ , tenemos $\mathbb{P}(X_j \in A_j) = \rho(A_j)$. Se sigue que,

$$\mathbb{P}(\Pi^{-1}(C)) = \rho(A_1) \cdots \rho(A_k) = \rho^{\mathbb{N}}(C).$$

Esto completa la demostración del lema. □

APÉNDICE A. ÁLGEBRAS DE CONJUNTOS Y MEDIDAS

En este apéndice recordamos algunos conceptos y resultados de teoría de la medida e integración. Para mayores detalles se puede consultar, por ejemplo, [Bil95] o [Hal50].

En esta sección fijamos un conjunto X .

A.1. Álgebras de conjuntos. Recordemos que una σ -álgebra de subconjuntos de X , o simplemente una σ -álgebra en X , es una colección de subconjuntos de X que contiene a X , y que es cerrada por complemento en X y por unión enumerable. Para una σ -álgebra \mathcal{F} en X , el par (X, \mathcal{F}) es un *espacio medible*.

En muchos de los espacios medibles de interés (X, \mathcal{F}) , la σ -álgebra \mathcal{F} esta definida a partir de una colección distinguida de conjuntos. Por ejemplo, la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} es la menor σ -álgebra en \mathbb{R} que contiene a todos los intervalos. Como en este ejemplo, usualmente la colección de conjuntos que se usa para definir \mathcal{F} tiene una estructura de “semi-álgebra”,** que pasamos a recordar.

Una *semi-álgebra de subconjuntos de X* , o simplemente una *semi-álgebra en X* , es una colección \mathcal{S} de subconjuntos que contiene al conjunto vacío, que es cerrada por intersección, y tal que el complemento en X de cada conjunto de \mathcal{S} se puede escribir como una unión finita de conjuntos en \mathcal{S} que son disjuntos dos a dos. Un *álgebra de subconjuntos de X* , o simplemente un *álgebra en X* , es una colección de subconjuntos de X que contiene al conjunto vacío, es cerrada por intersección y por complemento en X . Claramente toda σ -álgebra es un álgebra y toda álgebra es una semi-álgebra. Además, una semi-álgebra que es cerrada por complemento en X es un álgebra, y un álgebra que es cerrada por unión enumerable es una σ -álgebra.

Claramente, la clase de todos los subconjuntos de X es una (σ) -álgebra, y toda intersección arbitraria de (σ) -álgebras es una (σ) -álgebra. Se sigue que para toda semi-álgebra \mathcal{S} existe una (σ) -álgebra mas pequeña que contiene a \mathcal{S} ; es la *(σ) -álgebra generada por \mathcal{S}* . Si \mathcal{A} es una (σ) -álgebra generada por una semi-álgebra \mathcal{S} , decimos que \mathcal{S} *genera \mathcal{A}* . Observemos que el álgebra generada por una semi-álgebra \mathcal{S} es igual a la colección de todas las uniones finitas y disjuntas de elementos de \mathcal{S} .

A.2. Clases monótonas. Una *clase monótona* es una colección de subconjuntos de X que es cerrada por uniones enumerables crecientes y por intersecciones enumerables decrecientes. Claramente, la colección

**Sin embargo, la σ -álgebra de Borel de un espacio topológico X esta definida a partir de los abiertos de X , pero estos conjuntos no forman una semi-álgebra.

de todos los subconjuntos de X es una clase monótona, y una intersección arbitraria de clases monótonas es una clase monótona. Por lo tanto, para cada colección \mathcal{C} de subconjuntos de X , la intersección \mathcal{M} de todas las clases monótonas que contienen a \mathcal{C} es la menor clase monótona que contiene a \mathcal{C} ; en este caso decimos que \mathcal{M} es la *clase monótona generada por \mathcal{C}* , o que \mathcal{C} genera \mathcal{M} .

Proposición A.1. *Una clase monótona que es además un álgebra, es una σ -álgebra. Por otro lado, si una clase monótona contiene un álgebra \mathcal{A} , entonces también contiene la σ -álgebra generada por \mathcal{A} .*

Gracias a Sebastian Herrero por simplificar la demostración de esta proposición.

Demostración. Para demostrar la primera aserción, sea \mathcal{M} una clase monótona que es además un álgebra. Para demostrar que \mathcal{M} es una σ -álgebra es suficiente demostrar que \mathcal{M} es cerrada por unión enumerable. Sea $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión enumerable de conjuntos en \mathcal{M} y para cada n sea $A'_n := \bigcup_{j=1}^n A_j$. Entonces la sucesión $(A'_n)_{n=1}^{+\infty}$ es creciente y por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A'_n$ esta en \mathcal{M} . Esto demuestra que \mathcal{M} es cerrada por uniones enumerables y completa la demostración de que \mathcal{M} es una σ -álgebra.

Para demostrar la segunda aserción, sea \mathcal{A} un álgebra y \mathcal{M} la clase monótona generada por \mathcal{A} . Como \mathcal{M} esta contenida en toda clase monótona que contiene a \mathcal{A} , es suficiente demostrar que \mathcal{M} es una σ -álgebra. En vista de la primera aserción, es suficiente demostrar que \mathcal{M} es un álgebra. Como \mathcal{M} contiene al conjunto vacío es suficiente demostrar que \mathcal{M} es cerrada por intersección y por complementos en X . Para demostrar que \mathcal{M} es cerrada por intersección, demostraremos que para cada A en \mathcal{M} , la colección $\mathcal{M}(A)$ de todos los A' en \mathcal{M} tales que $A \cap A'$ esta en \mathcal{M} es igual a \mathcal{M} . Observemos primeramente que $\mathcal{M}(A)$ no es vacía, ya que contiene al conjunto vacío. Por otro lado, $\mathcal{M}(A)$ es claramente una clase monótona. Se sigue que la colección

$$\{B \in \mathcal{M} : \mathcal{A} \subset \mathcal{M}(B)\}$$

es una clase monótona que contiene a \mathcal{A} y luego debe ser todo \mathcal{M} . En particular, para cada A en \mathcal{M} la clase monótona $\mathcal{M}(A)$ contiene a \mathcal{A} , y por lo tanto es igual a \mathcal{M} . Como observamos anteriormente, esto último implica que \mathcal{M} es cerrada por intersección. Para demostrar que \mathcal{M} es cerrada por complementos en X , observemos simplemente que para cada A en \mathcal{M} el conjunto $X \setminus A$ esta en $\mathcal{M}(A)$, y por lo tanto en \mathcal{M} . Esto completa la demostración de que \mathcal{M} es un álgebra y, por la primera parte del lema, de que \mathcal{M} es una σ -álgebra. \square

A.3. Medidas. Recordemos que una *medida* en un espacio medible (X, \mathcal{F}) es una función $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty)$ que satisface $\mu(\emptyset) = 0$ y que es σ -aditiva: Para toda sucesión de conjuntos $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ en \mathcal{F} que son disjuntos dos a dos, tenemos

$$(A.1) \quad \mu \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Dada una σ -álgebra \mathcal{F} en X y una medida en (X, \mathcal{F}) , el triple (X, \mathcal{F}, μ) es un *espacio de medida*.

Dada una semi-álgebra \mathcal{S} en X , una función $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty)$ es *finitamente aditiva* si $\mu(\emptyset) = 0$ y si para cada entero $N \geq 1$ y cada sucesión de conjuntos A_1, \dots, A_N en \mathcal{S} que son disjuntos dos a dos y tales que su unión esta en \mathcal{S} , tenemos

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n).$$

Tal como en el caso de las σ -álgebras, la función μ es σ -aditiva si $\mu(\emptyset) = 0$ y si para toda sucesión de conjuntos $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ en \mathcal{S} que son disjuntos dos a dos y tales que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ esta en \mathcal{S} , tenemos (A.1).

Teorema A.2. *Dado un conjunto X , tenemos las siguientes propiedades:*

1. *Sea \mathcal{S} una semi-álgebra en X y \mathcal{A} el álgebra generada por \mathcal{S} . Entonces toda función finitamente aditiva (resp. σ -aditiva) $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty)$ admite una única extensión a \mathcal{A} que es finitamente aditiva (resp. σ -aditiva).*
2. *Sea \mathcal{A} un álgebra en X y $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ una función finitamente aditiva tal que $\mu(X) = 1$. Si para cada sucesión decreciente de conjuntos $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ en \mathcal{A} tal que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$ tenemos $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0$, entonces μ es σ -aditiva.*
3. *Sea \mathcal{A} un álgebra en X y \mathcal{F} la σ -álgebra generada por \mathcal{A} . Entonces toda función σ -aditiva $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ tal que $\mu(X) = 1$ admite una única extensión a \mathcal{F} que es una medida de probabilidad.*

REFERENCIAS

- [Aar97] Jon Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory*, volume 50 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [AB09] Artur Avila and Jairo Bochi. On the subadditive ergodic theorem. 2009.
- [BC06] Xavier Buff and Arnaud Chéritat. The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks. *Ann. of Math. (2)*, 164(1):265–312, 2006.
- [Bil95] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, third edition, 1995. A Wiley-Interscience Publication.
- [BL91] A. M. Blokh and M. Yu. Lyubich. Measurable dynamics of S -unimodal maps of the interval. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 24(5):545–573, 1991.
- [CG93] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Hal50] Paul R. Halmos. *Measure Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950.
- [Hal56] Paul R. Halmos. *Lectures on ergodic theory*. Publications of the Mathematical Society of Japan, no. 3. The Mathematical Society of Japan, 1956.
- [KP06] Michael Keane and Karl Petersen. Easy and nearly simultaneous proofs of the ergodic theorem and maximal ergodic theorem. In *Dynamics & stochastics*, volume 48 of *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.*, pages 248–251. Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2006.
- [Lyu00] Mikhail Lyubich. The quadratic family as a qualitatively solvable model of chaos. *Notices Amer. Math. Soc.*, 47(9):1042–1052, 2000.
- [Lyu02] Mikhail Lyubich. Almost every real quadratic map is either regular or stochastic. *Ann. of Math. (2)*, 156(1):1–78, 2002.
- [Mil06] John Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition, 2006.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [Ste89] J. Michael Steele. Kingman’s subadditive ergodic theorem. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 25(1):93–98, 1989.